Tecné, Episteme y Didaxis: TED
ISSN: 2665-3184
revistated.fct@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia

Samper de Caicedo, Carmen; Leguizamón de Bernal, Cecilia; Aya Corredor, Orlando; Martínez Hernández, Lorenzo

LA EXPLORACIÓN COMO ACTIVIDAD EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Tecné, Episteme y Didaxis: TED, núm. 17, enero-junio, 2005, pp. 26-41
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia

La exploración como actividad en el aprendizaje de la geometría

Exploration: an activity for the learning in Geometry

Carmen Samper de Caicedo, Cecilia Leguizamón de Bernal,
Orlando Aya Corredor, Lorenzo Martínez Hernández*

Resumen

En la búsqueda de generar entornos de aprendizaje que tengan un impacto positivo en la apropiación de conceptos y relaciones geométricas y en el desarrollo de métodos matemáticos, se diseñó el taller Otro Camino Hacia la Semejanza para que potenciara, a través de la exploración mediante el uso de la geometría dinámica, la elaboración de conjeturas y la construcción de argumentos, relacionados con los conceptos relativos a la semejanza de triángulos. Este artículo comunica los resultados del estudio comparativo del proceso de enseñanza y aprendizaje, que se realizó con dos grupos de estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional, que integraban un curso en el cual la temática escogida hace parte del programa. En uno de ellos se desarrolló el taller en mención; en el otro, la dinámica de enseñanza fue la tradicional, donde el profesor hacía clases magistrales.

Abstract

In the search for creating learning environments that have a positive impact on the appropriation of geometrical concepts and relations and on the development of mathematical methods, the workshop Otro Camino Hacia la Semejanza was designed to foster, through exploration with the use of a dynamic geometry system, the elaboration of conjectures and construction of arguments, around concepts related to triangle similarity. This article communicates the results of a comparative study of the teaching and learning process carried out with two groups of students of the Universidad Pedagógica Nacional, who were part of a course in which the topic chosen is studied. With one of the groups, the workshop was used; in the other group, the teaching dynamics was the traditional one, where the teacher simply lectures.

* Universidad Pedagógica Nacional, csamper@uni.pedagogica.edu.co, cleguiza@uni.pedagogica.edu.co, orlando_aya@yahoo.com, lmartinez@uni.pedagogica.edu.co.

Introducción

En la formación profesional del futuro educador de Matemáticas se hace necesario combinar el conocimiento disciplinar con la reflexión pedagógica. Esta idea se convirtió en el principio directriz del nuevo proyecto curricular de la Licenciatura en Matemáticas, en la Universidad Pedagógica Nacional. Por eso, en el marco teórico que sustenta la línea de Geometría (Samper et al., 2001), se sugieren condiciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática que brinden a los futuros profesores de esta disciplina una visión amplia y bien fundamentada de ésta, y la habilidad para diseñar e implementar ambientes propicios para la enseñanza y el aprendizaje. Se establece entonces que en los espacios académicos de la línea es necesario crear ambientes donde, a través de actividades, el estudiante pueda explorar e investigar acerca de los conceptos y relaciones geométricas objeto de estudio.

Varios investigadores, entre ellos De Villiers (1990, 1996), coinciden en que uno de los objetivos de la demostración, además de justificar un hecho geométrico, es comprenderlo, lo cual se logra si el estudiante ha vivido un proceso que permita la exploración en torno a la situación que lo lleve a realizar una conjetura. La investigación ha demostrado que el uso de la geometría dinámica para realizar exploraciones contribuye en dos aspectos: primero, provee un ambiente en el cual los estudiantes pueden experimentar libremente para comprobar sus intuiciones y conjeturas y, segundo, proporciona herramientas para que los estudiantes comprendan y aprehendan los conceptos y métodos matemáticos. Celia Hoyles y Keith Jones (1999) reconocen la importancia de que los estudiantes sientan la necesidad de un hecho geométrico válido. Por tanto, se deben propiciar situaciones que les permitan descubrirlos y explicar por qué deben ser ciertos, situaciones que les permitan establecer vínculos entre el razonamiento empírico y el deductivo.

Teniendo como horizonte estos planteamientos se desarrolló durante el primer semestre de 2003 un proyecto de investigación, cuyo objetivo era determinar la incidencia que tiene el uso de actividades de carácter exploratorio en el aprendizaje de la geometría euclidiana, estudiada como un sistema axiomático, y el impacto pedagógico que este tipo de actividades suscita en los estudiantes. Se diseñó un conjunto de actividades que, con el uso de la geometría dinámica, permitiera a los estudiantes realizar un estudio de índole exploratorio de un tema específico de la geometría. Este artículo se centra en el análisis de resultados del desempeño de los estudiantes y pretende socializar tanto el proceso como los resultados de dicha investigación, e invitar a los educadores a que en el trabajo en el aula realicen actividades de índole exploratorio, como herramientas para la construcción de conocimiento matemático.

Estudio investigativo

Para el desarrollo de las actividades de aula objeto de la investigación se escogió como tema uno de los conceptos primordiales de la geometría plana la semejanza de triángulos. Se seleccionaron dos grupos de estudiantes del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con el propósito de establecer diferencias entre los resultados de aprendizaje cuando se usan dos metodologías distintas para abordar un tema. Inicialmente, se establecieron parámetros acerca de la metodología que se usaría en cada grupo, se diseñaron actividades para realizar con uno de los grupos y evaluaciones que se aplicaron a todos los estudiantes objeto de la investigación.

Descripción del entorno

La población escogida para el desarrollo de la investigación estuvo integrada por dos grupos de estudiantes que cursaban en el primer semestre de 2003 el espacio académico de geometría en el que se incluye el estudio de la temática seleccionada; dos de los investigadores de este proyecto eran los profesores de la asignatura. El trabajo investigativo se realizó sin alterar el desarrollo normal del curso y sin que los estudiantes percibieran que lo que hacían era objeto de investigación.

Dado que parte integral del propósito investigativo era estudiar los efectos que el acercamiento a un concepto a través de la exploración surtiera sobre el aprendizaje de éste, se determinó que una herramienta importante para tal proceso era el uso de la geometría dinámica, porque permite en tiempo real la consideración de múltiples situaciones y las herramientas necesarias para investigarlas y así descubrir invariantes geométricos. Por esta razón, los estudiantes del Grupo A tuvieron una preparación para el manejo del *software* Cabri Géomètre. Esto se constituyó en un factor diferenciador entre los dos grupos, pues el Grupo B no tuvo esa experiencia. Otro factor que intervino fue el ambiente didáctico que se vivió en cada grupo, debido a las distintas metodologías empleadas, variable tenida en cuenta en el propósito de la investigación.

Metodología

En el Grupo B se siguió la dinámica tradicional de enseñanza a través de la presentación magistral de temas por parte del profesor, desarrolladas siguiendo la secuencia establecida en el texto guía, Geometría Moderna de Edwin E. Moise y Floyd L. Downs. El contrato didáctico, en forma implícita, convirtió al profesor en la fuente principal del conocimiento y a los alumnos en simples receptores de éste. La dinámica establecida no daba lugar a las discusiones; no propiciaba la construcción social del conocimiento, pues se presentaba la geometría como un cuerpo de conocimiento rígido y terminado. Por tanto, los alumnos no sentían la responsabilidad de participar activamente en su proceso de aprendizaje. El desarrollo conceptual del tema en el grupo B se ciñó a la propuesta sugerida por el texto guía. Ésta consistió inicialmente en enunciar la definición de triángulos semejantes y demostrar que una recta paralela a un lado de un triángulo determina en los otros dos lados del triángulo segmentos proporcionales a éstos. A partir de este teorema se demostraron los criterios que determinan la semejanza entre dos triángulos. Los estudiantes debían resolver los problemas propuestos en el texto guía, cuyas soluciones se revisaban en clase. Se terminó el estudio del tema en cuestión con la discusión de semejanza en triángulos rectángulos y área de triángulos semejantes.

En contraste, la metodología aplicada a lo largo del semestre en el Grupo A buscó promover un ambiente de aprendizaje donde el estudiante a través de la exploración descubría las relaciones geométricas objeto de estudio. Para este grupo se diseñó el taller *Otro camino hacia la semejanza (ver Anexo 1),* que propició la exploración mediante el uso de la geometría dinámica, herramienta didáctica que permite la obtención de regularidades, con la simulación y el análisis de múltiples situaciones en tiempo reducido.

En la tabla 1 se presenta la ruta conceptual seguida por cada uno de los grupos en el proceso de construcción del sistema axiomático relacionado con el tema de la semejanza de triángulos.

Tabla 1
Rutas Conceptuales

Grupo A	Grupo B
• Definición de proyección paralela del punto P sobre una recta m, respecto a una recta t. • Teorema de Thales • Teorema de Semejanza AAA	• Teorema: Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases. • Teorema Fundamental de la proporcionalidad: Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a dichos lados. • Teorema de Semejanza AAA

El taller introdujo el tema de semejanza a través de la presentación de una situación problema que debía ser explorada haciendo uso de la geometría dinámica con el *software* Cabri Géomètre. Para responder a las preguntas planteadas, los estudiantes debían realizar una exploración, haciendo uso de la geometría dinámica. La exploración potenció la elaboración de conjeturas que apuntaban a los conceptos involucrados en la semejanza de triángulos, a la solución de problemas de aplicación y a la formulación de los teoremas clásicos correspondientes. De este modo, la geometría dinámica permitió el paso de la geometría empírica a la teórica, proporcionando evidencias que convencían a los estudiantes de la validez de sus conjeturas, que procedieron a demostrar haciendo uso del sistema axiomático ya construido.

Como era necesario que los alumnos tuvieran un criterio para determinar la semejanza de triángulos, siguiendo los parámetros establecidos por el sistema axiomático, en el taller se presenta, como guía, un esquema visual para la demostración formal del Criterio AAA de la semejanza de triángulos, que requiere el uso de lo descubierto en el desarrollo del taller. Posteriormente, en el taller se proponen dos problemas de caracterización de puntos, en un triángulo, que dan lugar a relaciones de proporcionalidad entre las medidas de segmentos, resultado de la semejanza entre triángulos. Tales puntos pueden ser determinados con relativa facilidad, mediante las herramientas que ofrece la geometría dinámica. Una vez hecha la conjetura, los estudiantes procedían a validarla. Los dos problemas en mención son adaptaciones de problemas planteados en el texto Geometría Moderna, buscando propiciar la exploración para permitir el descubrimiento, por parte de los estudiantes, del hecho geométrico en cuestión. En cambio, el proceso seguido por los estudiantes del grupo B se limitó a la validación de un hecho geométrico que otra persona estableció.

El Grupo A desarrolló el taller en el Laboratorio de Informática, en 2 sesiones de 2 horas cada una. Los estudiantes trabajaron en grupos de 3. Se hizo una breve introducción al manejo del *software* y después se desarrolló el taller, al ritmo de cada grupo; la intervención del profesor se redujo a resolver problemas relativos al uso de la geometría dinámica.

Análisis de resultados

Para analizar los resultados de aprendizaje y llevar a cabo el estudio investigativo se elaboraron dos pruebas, que se aplicaron a los dos grupos. Las pruebas formaron parte de las evaluaciones previstas dentro del proceso valorativo normal de los estudiantes, de acuerdo con el esquema establecido en el espacio académico. También se aplicó una encuesta con el fin de determinar, por un lado, el impacto de las actividades realizadas en el proceso de formación de los estudiantes como profesionales de la educación y, por otro, su posición reflexiva frente al proceso didáctico llevado a cabo en el abordaje de las temáticas.

Análisis de resultados de las evaluaciones

Con las dos evaluaciones se pretendía valorar la apropiación, por parte del estudiante, del concepto de semejanza de triángulos. La primera evaluación se aplicó cuando ambos grupos conocían la definición de triángulos semejantes y el criterio AAA de semejanza de triángulos. La segunda evaluación se aplicó cuando se habían estudiado los demás criterios de semejanza y las relaciones a las que este concepto da origen en triángulos rectángulos.

Primera evaluación

La primera evaluación constaba de la siguiente pregunta:

Se da el paralelogramo $\square ABCD$ con sus diagonales. Una recta que pasa por B interseca a $\overline{AC}$ en E, a $\overline{DC}$ en G y a $\overline{AD}$ en F. Demuestre que

(1) $\Delta AEF \sim \Delta CEB$

(2) *EB es la media geométrica de EG y EF.*

Con el primer ítem de la evaluación se buscaba determinar si los estudiantes podían hacer una aplicación directa del tema estudiado, estableciendo la semejanza de dos triángulos. Con el segundo, se pretendía determinar si podían hacer el enlace entre la semejanza de triángulos y relaciones aritméticas entre longitudes de segmentos.

De acuerdo a los resultados, se clasificaron los alumnos en tres categorías según los parámetros que se dan a continuación.

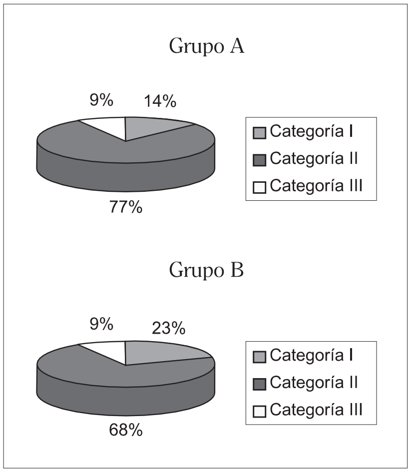
Categoría I Estudiantes que lograron demostrar la semejanza de los triángulos propuestos en el enunciado e identificar otro par de triángulos semejantes para demostrar el segundo ítem de la evaluación.

Categoría II Estudiantes que sólo pudieron establecer la semejanza entre los triángulos dados en la parte (a) del enunciado.

Categoría III Estudiantes que no lograron demostrar la semejanza de los triángulos propuestos en la parte (a) del enunciado, ni identificar otro par de triángulos semejantes para demostrar el segundo ítem de la evaluación.

En la gráfica 1 se observan diferencias entre los resultados de los grupos; como se observa, el grupo B obtuvo mejores resultados.

Gráfica 1



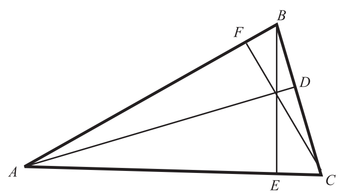
Segunda evaluación

La segunda evaluación constaba de las siguientes tres preguntas.

1. *Explique el proceso que seguiría para determinar el punto* C *en* $\overline{AB}$ *tal que* $\frac{AC}{BC}=\frac{PQ}{RS}$ *Indique las justificaciones correspondientes.*

2. *En el* ΔABC, *son alturas*

Demuestre que $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1.$



3. *Demuestre, estableciendo los pasos claves, que la razón entre las medianas correspondientes de dos triángulos semejantes y entre las bisectrices*

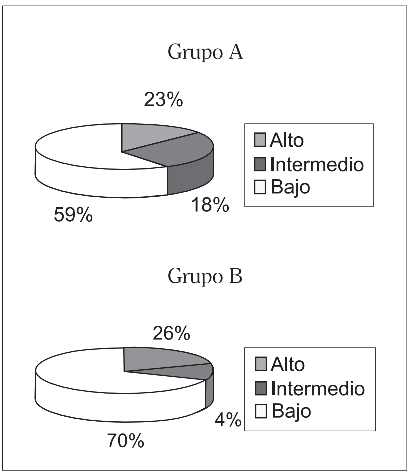
de los ángulos de cuyos vértices fueron dibujadas dichas medianas es la misma.

Con la primera pregunta se esperaba que los estudiantes relacionaran la proporcionalidad entre las medidas de los lados con el concepto de triángulos semejantes y rectas paralelas.

Teniendo en cuenta las respuestas, los estudiantes fueron clasificados en tres grupos, de acuerdo con los siguientes criterios:

- **Grupo alto:** Consta de aquellos estudiantes que pudieron resolver satisfactoriamente el problema, haciendo la construcción solicitada y dando las justificaciones correspondientes.
- **Grupo intermedio:** Se incluyen aquí aquellos estudiantes que propusieron construcciones que no eran del todo correctas.
- **Grupo bajo:** Corresponde al grupo de estudiantes que no hicieron propuesta de solución.

Gráfica 2



En esta ocasión, en el grupo A se obtuvieron mejores resultados.

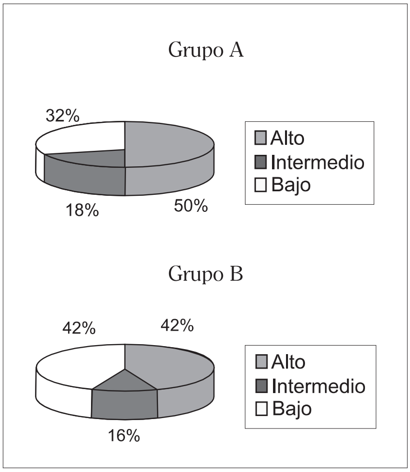
Con el segundo punto, se pretendía contrastar la capacidad de análisis, tanto geométrica como algebraica, y la habilidad del estudiante para identificar triángulos semejantes. Como ningún estudiante logró establecer las proporciones correspondientes y efectuar el análisis algebraico requerido, los criterios de clasificación para este ítem fueron los siguientes.

- **Grupo alto:** Consta de los alumnos que identificaron correctamente los triángulos semejantes, establecieron las proporciones correspondientes, pero les faltó el análisis algebraico requerido.
- **Grupo intermedio:** Formado por los estudiantes que identificaron correctamente los triángulos semejantes, pero no establecieron las proporciones correspondientes.
- **Grupo baj**o: Estos son los alumnos que no lograron identificar triángulos semejantes.

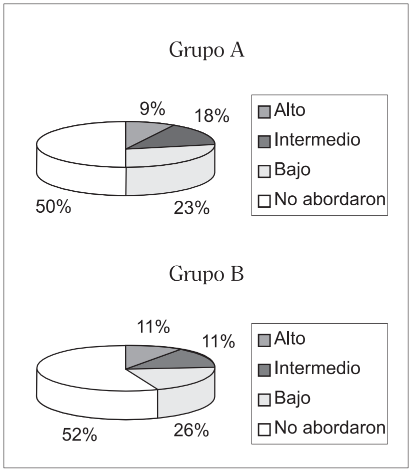
Nuevamente se observan diferencias entre los resultados obtenidos por el grupo A y el grupo B (Gráfica 3). En general, se notaron serias deficiencias en el manejo algebraico de la situación planteada.

El tercer punto difiere de los anteriores, pues en forma explícita se nombran dos triángulos semejantes, lo cual ubicaba a los estudiantes directamente en el tema motivo de estudio. Ellos debían demostrar su capacidad para manejar

Gráfica 3



Gráfica 4



los diferentes criterios de semejanza de triángulos.

La clasificación realizada, de acuerdo a las respuestas, fue la siguiente:

- **Grupo alto:** En este grupo están los estudiantes que resolvieron correctamente el problema.
- **Grupo intermedio:** Conformado por aquellos estudiantes que establecieron la semejanza entre los dos pares de triángulos necesarios para resolver el problema.
- **Grupo bajo:** Son aquellos estudiantes que solamente identificaron un par de triángulos semejantes.

En esta pregunta surgió la necesidad de incluir una cuarta categoría, conformada por aquellos estudiantes que no abordaron el problema.

En general, los estudiantes del grupo A muestran, en esta evaluación, un mejor desempeño que los del grupo B. 0

Análisis de la encuesta

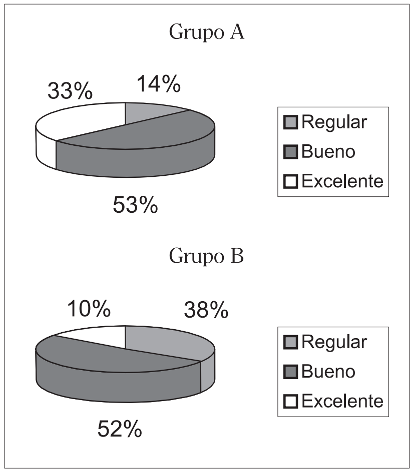
Aun cuando se evidencian unos resultados levemente mejores en el aprendizaje y dominio del tema Semejanza de Triángulos del grupo A frente al grupo B, los investigadores indagaron sobre efectos de otra índole. Para tal efecto se diseñó la encuesta *La "experimentación" en el aprendizaje de la geometría.* Las respuestas a las preguntas se clasificaron teniendo en cuenta dos aspectos: la formación disciplinar y la formación pedagógica y didáctica.

Con la primera pregunta se busca obtener la opinión de los estudiantes acerca de la metodología de enseñanza usada en el desarrollo de la temática en cuestión. Se pidió que la clasificaran como excelente, buena, regular o mala. Los estudiantes del grupo A vieron aspectos del proceso de aprendizaje que no percibieron los del grupo B. Esto se manifiesta a través de los comentarios que hacen en donde expresan cómo la exploración de situaciones geométricas con el uso de la geometría dinámica propició independencia en el aprendizaje, avance paulatino, según las capacidades propias, estimuló la investigación y posibilitó la simulación de variaciones, permitiendo ver regularidades implícitas en el concepto estudiado. Debido a esto último, se escogió como herramienta para la exploración un programa de geometría dinámica. Un estudiante recoge lo anterior en su comentario: *Este capítulo lo trabajamos por medio de calculadoras gráficas, las cuales nos ayudaron a explorar las situaciones y elaborar conjeturas para entender los teoremas que, sin saberlo, íbamos a ver más tarde.*

Los comentarios de los estudiantes del grupo B se refieren principalmente a la incidencia del profesor en su aprendizaje y al desarrollo tradicional de la clase, limitando la perspectiva del papel protagónico del estudiante en el proceso de su aprendizaje, al poner la responsabilidad en el profesor. Algunos de sus comentarios son los siguientes: *se enunciaron teoremas y resolvieron ejercicios, es simplemente una clase dictada, faltó elaboración y desarrollo de más ejercicios.* *Dos estudiantes expresan la ausencia de metodología que permitiera un mejor aprendizaje: el enfoque debió haber sido más reiterativo y más deductivo, se vio superficialmente el tema y faltó didáctica que facilitara el aprendizaje.*

En este grupo hay criterios opuestos referentes a la metodología, pues algunos estudiantes expresan su conformidad, mientras que otros manifiestan deficiencias.

Gráfica 5



Según las gráficas, los participantes consideran que el uso de la geometría dinámica permite un acercamiento favorable al concepto y enriquece la formación didáctico-pedagógica del estudiante. En ninguno de los grupos se consideró que la forma de acercamiento didáctico al tema fuera mala.

Las demás preguntas de la encuesta no se analizaron de forma cuantitativa, pues nos interesa más lo que dijeron que cuántos lo dijeron. La segunda pregunta indaga si consideran que el uso de herramientas alternativas (calculadoras, geometría dinámica) en la enseñanza de la Geometría es un estímulo para el aprendizaje. Los estudiantes del grupo A se refieren en sus comentarios a las bondades del uso de la geometría dinámica y a los aspectos que ésta favorece en el aprendizaje, como, por ejemplo, la interacción en el proceso de construcción de conceptos y la visualización de aspectos que no pueden verse con simple papel y lápiz. Comentan que el aprendizaje de manera experimental hace los objetos geométricos más *"palpables"*, facilita la verificación e impulsa la formulación de conjeturas. *Es una herramienta excelente para vincular muchos conceptos.*

La mayoría de los estudiantes del grupo B no dieron opiniones al respecto, porque con ellos no se implementó el uso de herramientas alternativas.

La tercera pregunta pide clasificar, en orden de importancia para su aprendizaje, las siguientes estrategias didácticas: discusión participativa estudiante–profesor, introducción de temáticas a través de resolución de problemas, talleres para trabajo en grupo, uso de herramientas alternativas y explicaciones del profesor. La estrategia que más destacaron fue la discusión participativa estudiante–profesor, evidencia de la necesidad de descentralizar el proceso de la presentación magistral de las temáticas. En el grupo A ningún estudiante destacó como aspecto relevante la introducción de temáticas a través de la resolución de problemas, hecho que resulta paradójico, dado que con este mecanismo se introdujo el tema de semejanza. En el grupo B ningún estudiante destacó como aspecto prioritario el desarrollo de talleres para trabajo en grupo.

Todas las apreciaciones anteriores se corroboran con el análisis del tópico referente al uso de herramientas alternativas. Mientras que en el grupo A sólo un 10% de los estudiantes considera este ítem como el aspecto más importante, en el grupo B hay un 19% que lo consideró más importante, a pesar de no haber vivido la experiencia con el uso de Cabri. Dado que la mayoría de los estudiantes contemplan como los aspectos más relevantes el trabajo en grupo y la discusión participativa estudiante-profesor, se entiende que perciben el aprendizaje como un acto de construcción social, mostrando así respaldo a la teoría sociocultural del aprendizaje.

La siguiente pregunta de la encuesta pide clasificar el aspecto relativo a la semejanza de triángulos, cuya comprensión les causó más dificultad: los criterios para demostrar semejanza de triángulos, el uso de la semejanza en la solución de problemas en otros contextos, la aplicación de la semejanza en el desarrollo de otros temas de la geometría, el manejo algebraico en la solución de problemas que involucran proporciones o la identificación de triángulos semejantes que permitan la solución de problemas de tipo geométrico.

Las respuestas a esta pregunta permiten ver que, de los aspectos relativos a semejanza de triángulos, los que conllevan más dificultad, en ambos grupos, fueron, de una parte, el manejo algebraico en la solución de problemas que involucran semejanza y, de otra, el uso de la semejanza en la solución de problemas en otros contextos, hecho que coincide con lo conceptuado por los profesores encargados de los grupos control y experimental. Este hecho debe ser tenido en cuenta para que, en cursos futuros, se trabajen más situaciones donde se aplique el concepto de semejanza en otros contextos. La debilidad en el manejo algebraico ha sido una constante que debe ser trabajada desde el comienzo de los estudios universitarios.

Para registrar los datos y hacer el análisis correspondiente se usaron las siguientes convenciones:

a: Criterios para demostrar semejanza de triángulos

b: Uso de la semejanza en la solución de problemas en otros contextos.

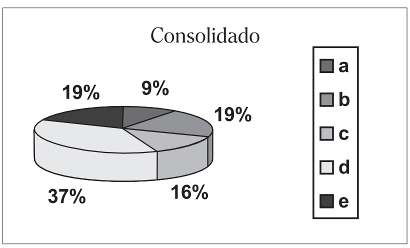
c: Aplicación de la semejanza en el desarrollo de otros temas de la geometría.

d: Manejo algebraico en la solución de problemas que involucran proporciones.

e: Identificación de triángulos semejantes que permitan la solución de problemas de tipo geométrico.

Debido a los aspectos analizados en esta pregunta, se decidió hacer el análisis consolidado de los dos grupos, es decir, de la totalidad de estudiantes que participaron en esta experiencia, el cual se muestra en la siguiente gráfica.

Gráfica 6



La última pregunta de la encuesta fue: ¿Qué elementos aportó para su formación pedagógica la forma como fue desarrollada la temática de semejanza? Justifique su respuesta.

Un análisis de las respuestas de los alumnos del grupo A permite recoger en la siguiente frase, de uno de ellos, lo que la mayoría de los estudiantes expresaron*: el uso de recursos tecnológicos favorece ambientes que permiten la investigación, a través de la solución de problemas, facilitando el descubrimiento de hechos geométricos, convirtiendo la construcción del conocimiento geométrico en un acto de interacción social.* Los alumnos reconocen la importancia del diseño cuidadoso de talleres para el trabajo en grupo en los cuales se usen diversas herramientas y material didáctico, alejándose de las clases de tipo tradicional. El grupo B, al no haber experimentado el desarrollo de clases con el uso de herramientas alternativas, manifiesta la necesidad de buscar otros acercamientos didácticos, reconociendo que el uso de distintas metodologías podría favorecer el aprendizaje de la geometría.

Teniendo en cuenta lo dilucidado en la encuesta concluimos lo siguiente. El empleo de dinámicas alternativas, metodología usada con el grupo A, logró generar en el estudiante inquietud frente a las diversas estrategias que pueden ser tenidas en cuenta en la construcción de conceptos, responsabilidad ante su aprendizaje y confianza en sus capacidades. Se enfatiza que, cualquiera sea el método empleado, la presencia del docente como orientador y acompañante del proceso de aprendizaje de los estudiantes no sólo es importante, sino indispensable.

Los alumnos hacen notar lo importante que es el que el docente tenga excelente dominio de la temática abordada en las clases, pues esto genera, a su vez, ambientes de seguridad y confianza en los estudiantes. Algunos de ellos lograron vivir una experiencia que puede ser reproducida, en un futuro, en su vida profesional, recordando que el uso de estrategias que proveen mayor visualización y aportan claridad es esencial en el camino hacia la formalización. Los dos grupos coinciden en la necesidad de diversificar las metodologías de trabajo en el aula con el fin de generar ambientes más propicios de aprendizaje donde estén puestas en escena, constantemente, las posibilidades de explorar, conjeturar y verificar

En la encuesta se incluyó otra pregunta dirigida solamente al grupo A, dado que el grupo B no realizó la experiencia con el Taller y el uso de la geometría dinámica. En ésta se les pedía que opinaran acerca de la siguiente afirmación: *La geometría dinámica propicia la conceptualización de objetos y relaciones geométricas.*

El 76% la consideraron válida, ya que permite la visualización, la elaboración de conjeturas, la exploración de casos, la generación de conflictos cognitivos que propician dinámicas de discusión en el grupo y esto, a su vez, ayuda a formalizar la temática, lo que lo convierte en un instrumento de mediación conceptual. Consideran que la geometría dinámica favorece el aprendizaje autónomo y el autodescubrimiento, así como la posibilidad de iniciar la presentación de un tema específico de la geometría desde una perspectiva intuitiva. Entre los estudiantes que consideraron que la geometría dinámica no propicia la conceptualización de objetos y relaciones geométricas, se argumenta que ésta sólo ayuda a la visualización, sin reconocer que esta es un paso hacia la conceptualización (Van Hiele).

La segunda afirmación que se pidió que analizaran fue: *La aproximación al tema de semejanza a través del uso de la geometría dinámica para la exploración invita a profundizar en el tema.*

Frente a esta afirmación todos los estudiantes consideraron que la aproximación a la semejanza utilizando la geometría dinámica sí invita a profundizar en el tema, dado que permite la experimentación y la visualización de más situaciones, generando, por una parte, el reto de encontrar la solución a un problema propuesto y, por otra, la invitación a plantear más problemas de los ya existentes. Reconocen que la geometría dinámica genera inquietudes, estimula la curiosidad y, como herramienta, es altamente motivante, dado que proporciona elementos para hacer comprobaciones, establecer conjeturas y genera la inquietud por formalizar. Teniendo en cuenta estos resultados, se considera que la experiencia fue fructífera en la medida que los estudiantes reconocen que no sólo el uso de la geometría dinámica, sino la forma como se hizo la aproximación al tema, son elementos importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un concepto.

Conclusiones

La exploración permitió la elaboración de conjeturas que apuntaban a los conceptos involucrados en la semejanza de triángulos, la solución de problemas de aplicación y la formulación de teoremas clásicos correspondientes. Con la exploración, a través de la geometría dinámica, los estudiantes pasaron de la geometría empírica a la teórica, corroborando sus conjeturas, que procedieron a demostrar haciendo uso del sistema axiomático ya construido.

Se sugiere incluir como parte de la formación profesional del docente de matemáticas el uso reflexivo y significativo de materiales manipulables, entre ellos la geometría dinámica, a través de talleres donde se puedan realizar procesos de construcciones geométricas o acercamientos a propiedades y relaciones geométricas, que permitan el descubrimiento de éstas, así como la formulación y validación de conjeturas.

Los estudiantes reconocen que el desarrollo de un tema, a través de actividades de índole exploratorio, en la cuales se usen diversas herramientas y material didáctico, propicia la autonomía en el aprendizaje, desarrolla competencias para la investigación, generalización, argumentación y desarrolla confianza en sus capacidades. La mayoría de los estudiantes de los dos grupos coincidieron en reconocer que la estrategia didáctica discusión participativa estudiante–profesor es importante para el aprendizaje, pues permite la construcción social del conocimiento. Los estudiantes mencionan la necesidad de generar ambientes de aprendizaje donde se pongan en escena situaciones que induzcan a la exploración.

Anexo

Otro camino hacia la semejanza

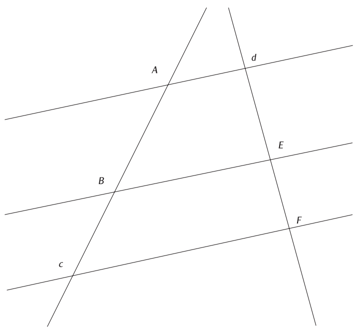
I Definición Dadas dos rectas t y m, coplanares, que no sean paralelas entre sí, y un punto P exterior a ellas. La ***proyección paralela del punto P sobre una recta m, respecto a la recta t,*** es un punto Q en la recta m que satisface $\overline{PQ} \parallel t$. La recta t se llama la directriz de la proyección y la recta *m* la recta de proyección.

1. Conteste cada pregunta y justifique la respuesta.
   a. Suponga que *A-B-C*. ¿Qué relación existe entre las respectivas proyecciones, con la misma directriz, de estos puntos sobre una misma recta?
   b. Explique por qué la definición anterior determina una función entre dos rectas *l* y *m* coplanares.
   c. ¿Cuál es la relación entre las proyecciones en m respecto a t de segmentos congruentes de *l*?
   d. Suponga que hay tres rectas paralelas cortadas por dos secantes m y *l*. ¿Qué relación aritmética existe

entre las longitudes de los segmentos determinados en *m* y las longitudes correspondientes a sus proyecciones en *l*?

Teorema de Thales

Si tres o más rectas paralelas cortan a dos secantes cualesquiera, los segmentos que determinan en una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra.



2. a) Utilizando la representación gráfica, reformule la afirmación anterior.

   b) Justifique cada afirmación numerada en la siguiente demostración:

Sean $x = \dfrac{BC}{AB}$, $y = \dfrac{EF}{DE}$, *m* y *n* dos enteros positivos.

1. Sean $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ puntos de $\overline{AB}$ tales que $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}B$.
   Sean $D_1, D_2, D_3, ..., D_{n-1}$ las respectivas proyecciones paralelas de $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ en $\overline{DE}$.

2. Sean $B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1}$ puntos de $\overrightarrow{BC}$ tales que $BB_1 = B_1B_2 = ... = B_{M-1}B_M = AA_1$
   Sean $E_1, E_2, E_3, ..., E_{n-1}$ las correspondientes proyecciones paralelas de $B_1, B_2, B_3, ..., B_m$ en $\overline{EF}$.

3. $\dfrac{BB_m}{AB} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{EE_m}{DE}$

4. Suponga que $\dfrac{m}{n} < x$ entonces $B - B_m - C$.

5. Entonces $\dfrac{m}{n} < y$.

6. Ahora suponga $\dfrac{m}{n} < y$ entonces $\dfrac{m}{n} < x$.

7. Entonces $x = y$.

Definición Dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre ellos de tal forma que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

3. Usando lo sugerido en las figuras, demuestre que si:
   $\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle D$ y
   $\angle C \cong \angle F$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta EDF$.

Figura 1

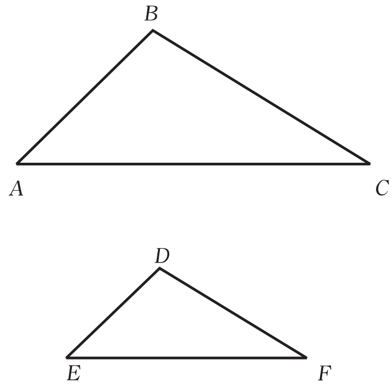
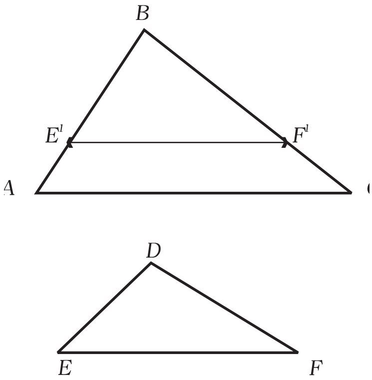


Figura 2

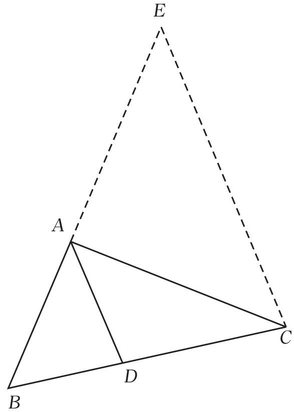


Teorema Se da una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Problema 1 En el $\Delta\, ABC$ determine el punto D sobre $\overline{BC}$ tal que $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BA}{CA}$.

Problema 2 En el $\Delta\, ABC$, el punto P en el interior del triángulo para el cual el segmento que une los puntos de intersección de $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CP}$ los lados opuestos correspondientes es paralelo a $\overline{BC}$. Determine la caracterización de P.

4. Usando lo sugerido en la figura, demuestre la conjetura correspondiente al Problema 1.



5. Demuestre su conjetura del problema 2.

6. **Problema 3:** Explique por qué es valida la construcción con regla y compás de la media geométrica.

Bibliografía

Clements, D., y Battista, M. (1992). “Geometry and spatial reasoning”. En Grouws, D. (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of th National Council of teachers of Mathematics*, NCTM, New York.

De Villiers, M. (1990). “The role and function of proof in mathematics”. En *Pythagoras*, 24, pp. 17-24.

De Villiers, M. (1998). “An alternative approach to proof in dynamic geometry”. En Lehrer, R., y Chazan, D. (ed.) *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, pp. 369-393. Lawrence Erblaum, EU.

Guerrero, A. (2002). *Geometría en el plano y en el espacio.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos.

Hoyles, C., y Jones, K. (1999). “Proof in dynamic geometry contexts”. En Mammana, c. y Villani, V (ed.) *Perspectivas on the Teaching of geometry for the 21stCentury. Capítulo 4 Computer Technology and the Teaching of Geometry,* pp.121-128. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Isaacs, I. M. (2001). *Geometría universitaria.* México, D.F.: Thomson Learning.

Moise, E., y Down, F. (1986). *Geometría moderna.* Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

Moise, E. (1974). *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado*. México: Editorial Continental.

Samper de Caicedo, C.; Leguizamón de Bernal, Cecilia; Camargo, Leonor, y Donado, Alberto. (2001). Hacia la construcción de un currículo para el área de Geometría de la Licenciatura en Matemáticas. En *Tecne, Episteme y Didaxis*, v. 10, pp.99-112.

Artículo recibido: 26-11-2004
y aprobado: 17-06-2005