



Madera y Bosques

ISSN: 1405-0471

mabosque@inecol.edu.mx

Instituto de Ecología, A.C.

México

Quiñonez Barraza, Gerónimo; De los Santos Posadas, Héctor Manuel; Cruz Cobos, Francisco; Velázquez Martínez, Alejandro; Ángeles Pérez, Gregorio; Ramírez Valverde, Gustavo

Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en masas mezcladas de *Pinus* en Durango, México

Madera y Bosques, vol. 21, núm. 2, 2015, pp. 59-71

Instituto de Ecología, A.C.

Xalapa, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=61740807005>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org



# Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en masas mezcladas de *Pinus* en Durango, México

Dynamic modeling for diameter distribution on *Pinus* mixed stands in Durango, Mexico

Gerónimo Quiñonez Barraza<sup>1</sup>, Héctor Manuel De los Santos Posadas<sup>1\*</sup>, Francisco Cruz Cobos<sup>2</sup>, Alejandro Velázquez Martínez<sup>1</sup>, Gregorio Ángeles Pérez<sup>1</sup> y Gustavo Ramírez Valverde<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Postgrado Forestal. Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo. Estado de México, México.

\* Autor de correspondencia: hmsantos@colpos.mx

<sup>2</sup>Instituto Tecnológico de El Salto. Mesa del Tecnológico s/n. CP 34942. El Salto P.N. Durango, México.

<sup>3</sup>Postgrado de Estadística. Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo. Estado de México, México.

## RESUMEN

La caracterización de las distribuciones diamétricas proporciona información sobre la estructura de un rodal y ayuda en la planeación de los tratamientos silvícolas en masas forestales bajo manejo. Se presenta la evaluación de la función Weibull para caracterizar las distribuciones diamétricas en masas mezcladas de especies del género *Pinus*. Se usaron 59 parcelas permanentes (900 m<sup>2</sup>) para el ajuste y 100 parcelas temporales de inventario forestal (1000 m<sup>2</sup>) para la validación. El método de momentos resultó mejor para estimar los parámetros de la función Weibull (menor error medio absoluto, menor error medio cuadrático y menor número de parcelas rechazadas con la prueba de Kolmogorov-Smirnov) en comparación con los métodos de máxima verosimilitud y percentiles. Los modelos de predicción de los parámetros con variables del rodal permiten caracterizar y proyectar la distribución teórica de clases diamétricas de manera sencilla y precisa. La curtosis (kurtosis) de la distribución Weibull es menos apuntada con la proyección del número de árboles por categoría diamétrica, la forma de la curva tiende a normalizarse, con una ligera asimetría positiva, mientras que para el área basal la forma de la distribución teórica es más apuntada. La proyección de la distribución Weibull puede ser utilizada para determinar regímenes de manejo forestal o para la regularización de las estructuras diamétricas en masas incoetáneas.

Palabras clave: distribución diamétrica, función Weibull, modelo dinámico, predicción de parámetros, recuperación de parámetros.

## ABSTRACT

The characterization of the diameter distributions provides information on the structure of a stand and support in the planning of silvicultural treatments in forests with management. We estimated the parameters of location, scale and shape of the Weibull function to characterize the diameter distribution of species mixture of *Pinus*. We used 59 plots for model fitting (900 m<sup>2</sup>) and 100 temporary forest inventory plots for validation (1000 m<sup>2</sup>). The method of moments was better to estimate the parameters of the Weibull function as statistics used to measure the goodness of fit (lower mean absolute error, lower mean square error and fewer rejected plots with Kolmogorov-Smirnov test) compared with maximum likelihood and percentile methods. The prediction models of the parameters with stand variables represent a flexible and simple way to characterize and project the theoretical distribution of diameter classes easily and accurately. The kurtosis of the Weibull distribution has less peakedness with the projection of the number of trees in diameter classes, the shape of the curve tends to normalize and a slight positive skewness, while basal area in the form is more theoretical platykurtic distribution. The projection of the Weibull distribution can be used to determine forest management regimes or to regularize diameter structures in uneven-aged stands.

Key words: diameter distribution, Weibull function, dynamic model, parameter prediction, recovery parameters.

## INTRODUCCIÓN

La modelación y caracterización de las distribuciones diamétricas es de gran importancia en el manejo forestal. El diámetro es una variable muy correlacionada con la altura y el volumen y es concluyente para determinar los costos de extracción y comercialización de productos forestales. La modelación de las estructuras diamétricas y su relación con la calidad de estación, la composición de especies, la edad y la densidad del rodal es una herramienta muy valiosa para el manejo de bosques (Bailey y Dell, 1973). La relación de las distribuciones diamétricas con la distribución en área basal y volumen permite la planeación y regulación de las estructuras diamétricas (Shiver, 1998; Zhang *et al.*, 2001; Eerikäinen y Maltamo, 2003; Nor-Larsen y Cao, 2006; Gorgoso *et al.*, 2007).

El proceso de modelación de estructuras diamétricas implica la selección de una función de densidad de probabilidades adecuada, el desarrollo de una metodología para la estimación de los parámetros y la validación del modelo seleccionado (Reynolds *et al.*, 1988). Bailey y Dell (1973) señalan que la selección de una función de densidad de probabilidad (fdp) debe considerar que la función sea capaz de representar el intervalo completo de formas unimodales y continuas de las distribuciones diamétricas. Así, la fdp debe cubrir las diversas formas de las distribuciones reales con diversos grados de asimetría positiva o negativa. Los parámetros que caracterizan la fdp deben variar de manera coherente con las características del rodal (Shiver, 1988).

Muchas funciones de distribución continuas univariadas han sido usadas para describir las distribuciones diamétricas de áreas forestales. Las más comunes en los últimos años se basan en la distribución Normal (Nanang, 1998), la distribución Weibull (Zhang *et al.*, 2001; Maldonado y Návar, 2002; Gorgoso *et al.*, 2007; Lei, 2008), la distribución gamma (Álvarez y Ruiz, 1997), la distribución Log-Normal (Nanang, 1998) y la distribución  $S_B$  de Jhonson (Kudus *et al.*, 1999; Zhang *et al.*, 2003; Fidalgo *et al.*, 2009).

De las funciones anteriormente mencionadas la función Weibull ha sido aplicada extensivamente en la silvi-

cultura debido a: 1) la habilidad para describir una variedad de distribuciones unimodales incluyendo la forma de j-invertida, la exponencial y la distribución normal de frecuencias, 2) la relativa simplicidad de la estimación de los parámetros y 3) tiene una forma cerrada de la función de densidad acumulada (Bailey y Dell, 1973; Torres-Rojo *et al.*, 2000; Gorgoso *et al.*, 2007; Lei, 2008). Por su flexibilidad y sencillez se ha empleado frecuentemente en la modelación y caracterización de las estructuras diamétricas de masas puras y mezcladas.

La función Weibull puede caracterizarse de manera dinámica a partir de la Predicción de sus Parámetros (PPE). Es decir, después de haber estimado los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  (parámetros de localización escala y forma) con alguno de los métodos diseñados para ello (Torres-Rojo *et al.*, 2000), se pueden relacionar con variables del rodal usando modelos lineales (o no lineales). De esta forma al cambiar las variables del rodal, automáticamente cambiarán los parámetros que caracterizan la distribución diamétrica. En general este se considera un método débil para estimar los parámetros de la función Weibull, sin embargo se han obtenido buenos resultados de ajuste que además permiten obtener directamente los parámetros de las distribuciones futuras proyectadas y facilitan la planeación de los regímenes de cortas intermedias (Reynolds *et al.*, 1988; García *et al.*, 2002).

Otra forma de estimar los parámetros de la función Weibull representa una mezcla entre métodos de estimación de los parámetros y percentiles; como es el método de Recuperación de Parámetros (PRE) que consiste en recobrar los parámetros de la distribución a partir de sus momentos no-centrales y momentos centrales, teniendo como base un conjunto de percentiles los cuales son fáciles de modelar de manera dinámica (Hyink y Moser, 1983). Dada la mayor relación entre momentos y/o percentiles con los atributos del rodal, esta técnica ha brindado buenos ajustes (Borders y Paterson, 1990; Torres-Rojo *et al.*, 2000).

En este estudio, la estimación de los parámetros de la función Weibull se realizó mediante los métodos momentos (ME), máxima verosimilitud (MLE) y percentiles (PE).



Para modelar de manera dinámica los parámetros de la función Weibull se utilizó el método de predicción de parámetros (PPE) relacionando variables de la parcela con los estimadores de los parámetros obtenidos con ME.

## OBJETIVOS

Ilustrar una estrategia de modelación dinámica para las distribuciones diamétricas de masas mezcladas del género *Pinus* vía Predicción de Parámetros (PPE).

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Descripción del área de estudio y caracterización de la base de datos

La información para desarrollar el presente estudio se colectó en masas mezcladas del género *Pinus* en el Ejido San Diego de Tezains en el Noroeste del estado de Durango, entre las coordenadas extremas; 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" de latitud norte y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" de longitud oeste (Fig. 1).

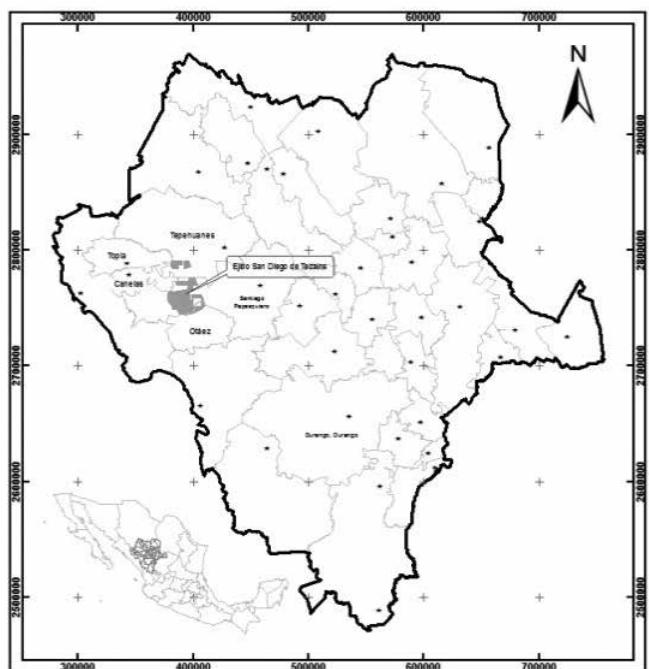


Figura 1. Ubicación del área de estudio.

Se utilizó una base de datos de 59 parcelas permanentes de investigación silvícola de forma rectangular de 900 m<sup>2</sup>. Estas se establecieron en el año 2003 y se remidieron en 2006. La distribución de las parcelas fue en forma aleatoria en las áreas forestales del predio. Para modelar los parámetros de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas, se agruparon las especies de *Pinus arizonica* Engelmannii, *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus teocote* Schlecht. Cham, *Pinus leiophylla* Schlecht. Cham, *Pinus lumholtzii* Rob. & Fer y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. Var. brachyptera como género *Pinus*. Para la validación de los métodos usados en el ajuste se utilizó una base de datos de 100 parcelas temporales de inventario con forma circular de 1000 m<sup>2</sup>, por ser información que siempre se usa para la formulación de programas de manejo forestal. En la tabla 1 se presenta la descripción de diámetros, área basal y edad de los datos usados en el ajuste y validación.

Para el ajuste de los modelos de proyección del diámetro normal y la estimación de la edad en función del diámetro normal se utilizó una base de datos de análisis troncales de 222 árboles (1622 pares de datos) agrupados como género *Pinus*.

### Función de distribución Weibull

La función de densidad de probabilidad (fdp) Weibull derivada por Weibull (1939) en estudios de resistencia de materiales y por su flexibilidad y fácil integración ha sido ampliamente utilizada en la modelación de las estructuras diamétricas en bosques naturales y plantaciones por diferentes investigadores (Bailey y Dell, 1973; Nanang, 1998; Torres-Rojo *et al.*, 2000; Eerikäinen y Maltamo, 2003; Nord-Larsen y Cao, 2006; Gorgoso *et al.*, 2007). La expresión de la fdp Weibull (Weibull y Sweden, 1951; Tsu *et al.* 1952; Bailey y Dell, 1973; Lei, 2008), es la siguiente:

$$F(D) = \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{D-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} \quad (1)$$

Con  $a \leq D < \infty$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$  y  $c > 0$ .

Donde  $D$  es el diámetro normal (variable aleatoria),  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull respectivamente.

TABLA 1. Estadística descriptiva de las parcelas usadas en el ajuste y validación para estimar los parámetros de la función Weibull.

Variable	Ajuste (n=59)				Validación (n=100)			
	Mínimo	Máximo	Media	SD	Mínimo	Máximo	Media	SD
$D_{min}$	8.80	20.50	11.03	1.90	10.00	13.00	10.15	0.46
$D$	15.05	39.46	22.08	4.77	13.75	32.58	19.85	3.31
$D_{max}$	27.90	67.70	42.43	7.94	26.00	89.00	45.07	11.00
$D_q$	15.77	41.79	23.69	5.14	14.94	38.20	21.47	3.79
AB	0.29	3.68	1.36	0.62	0.84	6.53	1.92	0.78
$E_{min}$	11.00	44.00	21.47	5.91	23.33	30.97	23.71	1.16
$E$	28.00	70.90	45.90	9.35	33.10	84.74	49.28	8.97
$E_{max}$	43.00	167.00	82.32	21.38	65.46	247.11	118.83	31.42

$D_{min}$ : diámetro mínimo (cm);  $D$ : diámetro medio (cm);  $D_{max}$ : diámetro máximo (cm);  $D_q$ : diámetro cuadrático (cm); AB: área basal ( $m^2$ );  $E_{min}$ : edad mínima;  $E$ : edad media;  $E_{max}$ : edad máxima y SD: desviación estándar (cm).

Si  $c < 1$ , la curva de la función Weibull es de la forma j-invertida; si  $c = 1$ , coincide con la función exponencial; si  $1 < c < 3.6$ , la curva presenta asimetría positiva; si  $c \approx 3.6$ , la curva se aproxima a la distribución normal; si  $c > 3.6$ , presenta asimetría negativa; si  $c \leq 1$ , la función Weibull es común en masas irregulares de especies tolerantes (Bailey y Dell, 1973).

Con la integración de la fdp por el método de sustitución o cambio de variable se obtiene la función de distribución acumulada Weibull (cdf) (Weibull y Sweden, 1951; Tsu *et al.*, 1952) y evaluada de 0 a  $\infty$  ( $D = \infty$  la cdf acumula el total de la distribución), se obtiene la expresión dada por (2) y la evaluación de la integral entre dos categorías diamétricas con (3).

$$F(D) = \int_0^{\infty} \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{D-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} d_D = 1 - e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} \quad (2)$$

Siendo  $F(D)$  la frecuencia relativa acumulada de árboles con un diámetro menor o igual a  $D$ ;  $L_1$  y  $L_s$  son los límites

inferior y superior de la clase o intervalo de diámetro donde se desea conocer el número de árboles.

Así para la obtención del número de árboles acumulados por clase diamétrica se debe multiplicar el resultado de la fdp por la densidad del rodal y por el tamaño de la clase diamétrica o multiplicar el número de árboles por la cdf evaluada entre los límites inferior y superior de la categoría diamétrica en la que se quiere conocer el número de árboles.

### Estimación de los parámetros de la distribución Weibull

Se utilizaron 3 procedimientos para la estimación de los parámetros de la función Weibull por parcela, basados en el método de momentos (ME), máxima verosimilitud (MLE) y método de percentiles (PE).

El parámetro de localización ( $a$ ) para ME, MLE y PE fue estimado con el método propuesto por Zanakis (1979). Este método usa los diámetros mínimos y el diámetro máximo (Bailey y Dell, 1973; Zarnoch y Dell, 1985; Shiver, 1988; Nanang, 1998), mediante la expresión (4).

$$F(L_1 \leq D \leq L_s) = \int_{L_1}^{L_s} \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{D-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{D-a}{b}\right)^c} d_D = e^{-\left(\frac{L_1-a}{b}\right)^c} - e^{-\left(\frac{L_s-a}{b}\right)^c} \quad (3)$$



$$a = \begin{cases} \frac{D_1 D_M - D_2^2}{D_1 + D_M - 2D_2} & \text{si } (D_2 - D_1) < (D_M - D_2) \\ D_1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4)$$

Donde  $D_1$ ,  $D_2$  son los diámetros menores de la parcela (cm) y  $D_M$  es el diámetro máximo de la parcela (cm).

### Método de momentos (ME)

Este método relaciona los parámetros de escala y forma de la función Weibull con el primero y segundo momento de la distribución diamétrica; diámetro medio y varianza respectivamente (Shiver, 1988; Nanang, 1998; Cao, 2004; Gorgoso *et al.*, 2007). Las expresiones para estimar los parámetros bajo este método fueron (5 y 6).

$$b = \frac{\bar{D}}{\Gamma(1 + \frac{1}{c})} \quad (5)$$

$$\sigma^2 = \frac{\bar{D}^2}{\Gamma^2(1 + \frac{1}{c})} \left[ \Gamma(1 + \frac{2}{c}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{c}) \right] \quad (6)$$

Donde  $\bar{D}$  es el diámetro medio de la distribución,  $\sigma^2$  la varianza y  $\Gamma(i)$  es la función Gamma para cada punto ( $D = i$ ), dada por  $\Gamma(i) \int_0^{\infty} D^{i-1} e^{-D} d_D$ .

### Método de máxima verosimilitud (MLE)

Se basa en obtener una estimación de los parámetros de la función Weibull maximizando la probabilidad de obtener una muestra de dicha distribución teórica que coincida con la distribución observada (Bailey y Dell, 1973; Álvarez y Ruiz, 1998; Nanang, 1998; Gorgoso *et al.*, 2007). Para estimar los parámetros de escala y forma para cada parcela, de las ecuaciones 7 y 8, se utilizó el procedimiento LIFEREG en SAS/STAT<sup>TM</sup> (SAS Institute Inc., 2011).

$$c = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n D_i^c \ln D_i}{\sum_{i=1}^n D_i^c} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln D_i \right]^{-1} \quad (7)$$

$$b = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i^c \right]^{\frac{1}{c}} \quad (8)$$

Donde  $n$  es igual al número de observaciones de la muestra en una distribución Weibull y  $D_i$  es el diámetro de cada árbol.

### Método de percentiles (PE)

Este método utiliza los percentiles para estimar los parámetros de la distribución Weibull (Bailey y Dell, 1973; Zanakis, 1979; Shiver, 1988; Nanang, 1998; Gorgoso *et al.*, 2007). Los parámetros de escala y forma fueron estimados con las siguientes expresiones:

$$b = P_{63} - a \quad (9)$$

$$c = \frac{\ln \left[ \frac{\ln(1-r)}{\ln(1-t)} \right]}{\ln \left( \frac{Pr - a}{Pt - a} \right)} \quad (10)$$

Donde  $P_r$  y  $P_t$  son los percentiles de orden  $100r$  y  $100t$  de la distribución diamétrica, con  $r = 0.97366$  y  $t = 0.16731$ ,  $\ln$  es el logaritmo natural.

### Modelos de predicción de parámetros (PPE)

Para la predicción de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull ( $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente), los parámetros estimados por ME fueron relacionados con variables de la parcela; el diámetro mínimo, diámetro medio y diámetro cuadrático (proceso STE-PWise en regresión lineal) y los estadísticos de ajuste fueron redefinidos para los modelos sin intercepto, así los parámetros fueron estimados con las expresiones siguientes:

$$a = \beta_1 D_{min} \quad (E1)$$

$$b = \beta_1 \bar{D} + \beta_2 D_{min} + \beta_3 D_q \quad (E2)$$

$$c = \beta_1 \bar{D} + \beta_2 D_q + \frac{\beta_3}{\bar{D}} + \frac{\beta_4}{D_{min}} \quad (E3)$$

Donde  $\beta_i$  es el parámetro regresión ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

## Modelos de proyección de variables del rodal

Para la proyección de los diámetros mínimo, medio y cuadrático se utilizó la ecuación ADA (Algebraic Difference Algebraic Approach, por sus siglas en inglés) anamórfica basado en el modelo de Chapman Richards (Amaro, 1998), para el diámetro normal se utilizó la ecuación ADA anamórfica basado en el modelo de Korf. Para predecir la edad de los árboles en función del diámetro normal para la fase de validación se utilizó un modelo de potencia. Las expresiones usadas fueron las siguientes.

$$D_{min2} = D_{min1} \left( \frac{1-e^{\beta_2 E_{min2}}}{1-e^{\beta_2 E_{min1}}} \right)^{\beta_3} \quad (E4)$$

$$\bar{D}_2 = \bar{D}_1 \left( \frac{1-e^{\beta_2 \bar{E}_2}}{1-e^{\beta_2 \bar{E}_1}} \right)^{\beta_3} \quad (E5)$$

$$D_{q2} = D_{q1} \left( \frac{1-e^{\beta_2 \bar{E}_2}}{1-e^{\beta_2 \bar{E}_1}} \right)^{\beta_3} \quad (E6)$$

$$D_2 = D_1 e^{[-\beta_2 (E_2^{\beta_3} - E_1^{\beta_3})]} \quad (E7)$$

$$E = \beta_1 D^{\beta_2} \quad (E8)$$

Donde  $D$ ,  $D_{min}$  y  $\bar{D}$  son el diámetro normal, mínimo y medio;  $E$ ,  $E_{min}$  y  $\bar{E}$  son la edad observada, mínima y media;  $D_q$  es el diámetro cuadrático;  $\beta_i$  son los parámetros de los modelos y  $e$  es la función exponencial.

## Estadísticos para medir el ajuste

La bondad de ajuste de los métodos estudiados para estimar los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull fue evaluada con el sesgo promedio (Bias), error medio absoluto (MAE) y el cuadrado medio del error (MSE). Para los modelos de proyección y estimación de la edad se usó el coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_a$ ) y la raíz del error medio cuadrático (RMSE). Los estadísticos son dados por las expresiones siguientes.

$$Bias = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (11)$$

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n} \quad (12)$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad (13)$$

$$R^2_a = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (14)$$

$$RMSE = \left( \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Donde  $y_i$  es el número de árboles observado por categoría diamétrica,  $\hat{y}_i$  es el número de árboles predicho por categoría,  $\bar{y}$  es la media por categoría diamétrica,  $n$  es el número de categorías diamétricas y  $p$  es el número de parámetros.

Para verificar la hipótesis de que las distribuciones diamétricas de las parcelas siguen una distribución Weibull se utilizó el estadístico de Kolmogorov-Smirnov (K-S) que compara las frecuencias acumuladas teóricas con las observadas.

$$D_n = \text{Max} |F_n(D_i) - F(D_i)| \quad (16)$$

Donde  $D_n$  es el valor del estadístico K-S,  $F_n(D_i)$  es la distribución de la frecuencia acumulada observada para la parcela  $i$  y  $F(D_i)$  es la probabilidad de la frecuencia acumulada teórica para la parcela, se usó un nivel de significancia  $\alpha=20\%$ .

También se utilizó el índice de error ( $EI$ ) ponderado por el área basal (AB) de las categorías diamétricas por parcela (Reynolds *et al.*, 1988; Cao, 2012).

$$EI = \frac{\sum_i \sum_j |AB_{ij} (n_{ij} - \hat{n}_{ij})|}{n} \quad (17)$$

Donde  $n_{ij}$  y  $\hat{n}_{ij}$  son el número de árboles observado y predicho en las clases diamétricas para la parcela  $i$ ,  $AB_{ij}$  es el



área basal de la clase diámetrica  $j$  para la parcela  $i$  y  $n$  es el número de parcelas.

## RESULTADOS

Los parámetros estimados por el método de momentos (ME), de acuerdo con los estadísticos de ajuste, fueron los más precisos y estos fueron usados para predecir los parámetros de la función Weibull vía predicción de parámetros (PPE) con variables de la parcela. En la tabla 2 se presentan los parámetros estimados, sus errores estándar y los estadísticos de ajuste (raíz del error medio cuadrático (RMSE) y coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_a$ )) de los modelos utilizados para estimar los parámetros de localización escala y forma de la función Weibull por PPE; también se presentan los estadísticos para los modelos de proyección de las variables de la parcela (diámetro normal, diámetro mínimo, diámetro medio y diámetro cuadrático) y para el modelo que estima la edad. En todos los casos los parámetros estimados fueron altamente significativos (valor de probabilidad de rechazo < 1%).

En la tabla 3 se presentan las estadísticas descriptivas de los parámetros estimados de la función Weibull por ME, MLE y PE tanto para el ajuste como para la validación. El parámetro de localización con ME, MLE y PE resultó igual, ya que se usa el mismo estimador (Zanakis, 1976).

En la tabla 4 se presentan los estadísticos de ajuste de los métodos usados para estimar los parámetros de la función Weibull, también se puede apreciar el número parcelas que siguen una distribución Weibull y las rechazadas entre paréntesis con nivel de significancia de  $\alpha = 20\%$  del estadístico de Kolmogorov-Smirnov (K-S).

La estimación vía ME es la que arrojó un menor número absoluto de parcelas rechazadas tanto en las de referencia como en la muestra de validación (2). MLE parecía el menos eficiente sobre todo en la validación con 19 rechazos en total mientras que PE tiene un total de 6.

Tomando en cuenta estos resultados, se decidió utilizar los parámetros estimados vía ME para ajustar los modelos de predicción de parámetros, los estadísticos de ajuste también se pueden observar en la tabla 2.

Las 59 parcelas de referencia tanto para MLE y PE tendieron a sobreestimar las frecuencias de árboles en las categorías de diámetro mayores a 30 cm (a1 y a2) (Fig. 2). En la validación, PE sobreestimó por debajo de la categoría de diámetro de 55 cm mientras ME y PPE fueron los métodos que mejor predijeron las frecuencias de número de árboles (b1 y b2).

En la figura 3 se presentan la distribución observada y estimada por ME, MLE, PE y PPE (asimetría positiva) para una parcela muestra con 10.8 cm, 22.50 cm y 44.30 cm de

TABLA 2. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de los modelos de predicción de parámetros y proyección de variables de rodal.

Ec	n	Parámetros								RMSE	$(R^2_a)$
		$\beta_1$	$\beta_1e$	$\beta_2$	$\beta_2e$	$\beta_3$	$\beta_3e$	$\beta_4$	$\beta_4e$		
E1	59	0.994	0.002							0.21	0.99
E2	59	2.234	0.054	-1.362	0.018	-0.944	0.047			0.22	0.99
E3	59	0.460	0.021	-0.403	0.021	-16.678	2.285	16.01	1.50	0.09	0.90
E4	59			0.054	0.021	0.264	0.050			0.37	0.96
E5	59			-0.008	0.001	0.842	0.028			0.08	0.99
E6	59			-0.011	0.002	0.820	0.046			0.15	0.99
E7	1622			13.060	1.476	0.087	0.015			1.56	0.98
E8	1622	2.624	0.148	1.022	0.017					7.20	0.95

Ec: ecuación; n: número de observaciones;  $\beta_i$ : estimador del parámetro;  $\beta_i e$ : error estándar del parámetro correspondiente; RMSE: raíz del error medio cuadrático;  $(R^2_a)$ : coeficiente de determinación ajustado.

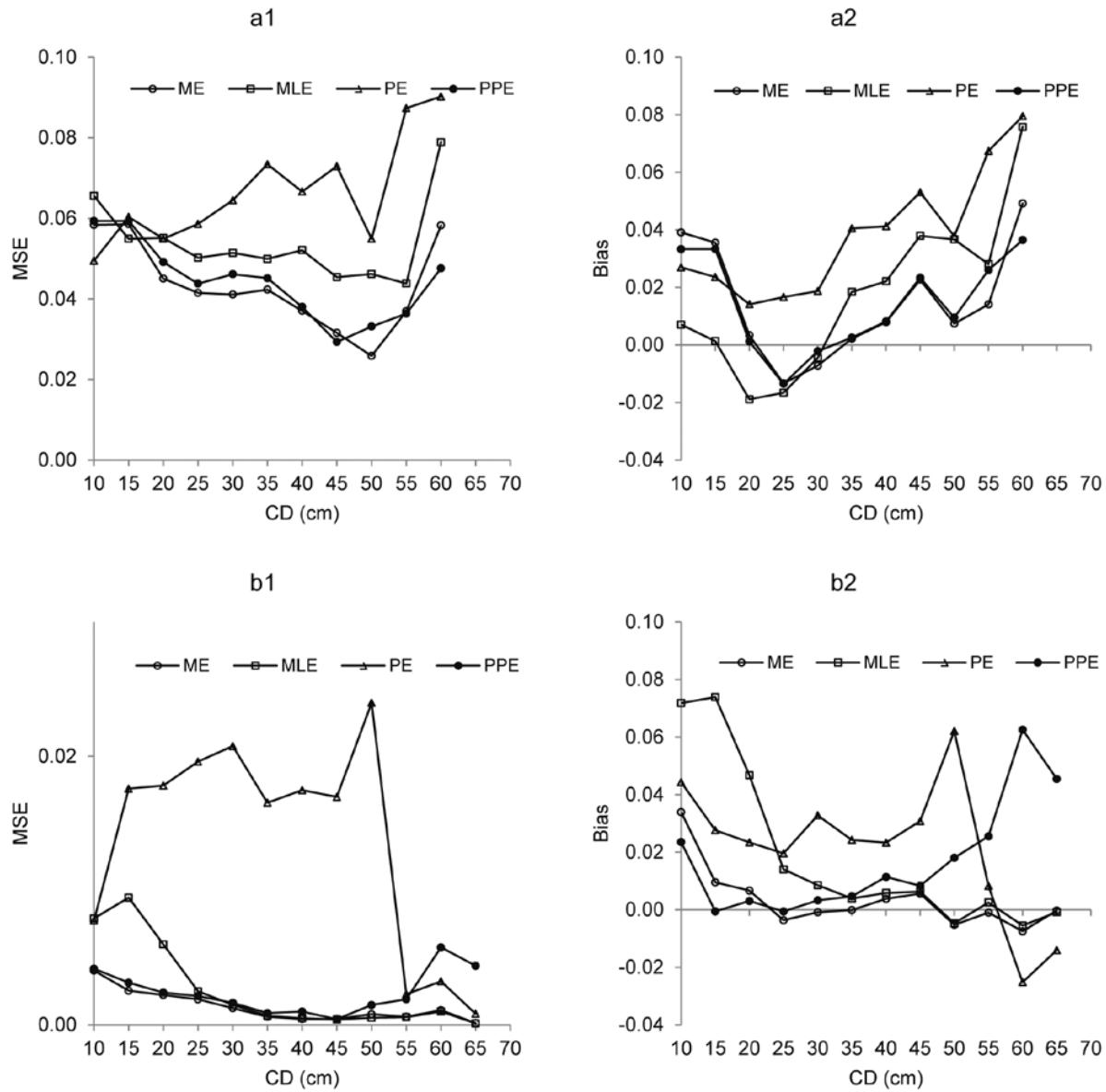


FIGURA 2. Error Medio Cuadrático (MSE) por categoría diamétrica en el ajuste (a1) y validación (b1) y Sesgo promedio (Bias) en frecuencia relativa acumulada de número de árboles por categoría diamétrica en el ajuste (a2) y validación (b2).

diámetros mínimo, medio y máximo respectivamente y con edad media de 52 años. También se presentan las proyecciones de la distribución de diámetro y área basal de la función Weibull con PPE en intervalos de 5 años, 10 años y 15 años, proyectados con los modelos dinámicos de variables de rodal. Se aprecia como disminuye la curtosis (kurtosis) en la forma de la distribución Weibull a medida que los árboles cambian de categoría diamétrica. En la

distribución teórica del área basal la curtosis (kurtosis) es más apuntada conforme aumenta la edad.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La estimación de los parámetros por los métodos usados presentó simplicidad y resultados deseables de acuerdo con los estadísticos de ajuste. Los porcentajes 10% y 20% de las parcelas en el proceso de ajuste y validación, respec-



TABLA 3. Estadísticas descriptivas de los parámetros estimados de la función Weibull por los métodos analizados.

Método	Par	Ajuste					Validación			
		Mínimo	Máximo	Media	SD	Mínimo	Máximo	Media	SD	
ME	<i>a</i>	8.64	20.44	10.97	1.85	9.47	12.97	10.13	0.47	
MLE	<i>a</i>	8.64	20.44	10.97	1.85	9.47	12.97	10.13	0.47	
PE	<i>a</i>	8.64	20.44	10.97	1.85	9.47	12.97	10.13	0.47	
ME	<i>b</i>	5.59	29.15	11.92	4.52	2.78	23.78	10.21	3.81	
MLE	<i>b</i>	4.94	28.64	11.34	4.43	4.94	26.36	11.27	3.64	
PE	<i>b</i>	4.10	31.93	12.71	5.50	3.00	25.21	10.29	4.00	
ME	<i>c</i>	0.75	2.13	1.32	0.30	0.66	2.63	1.25	0.35	
MLE	<i>c</i>	0.45	2.00	1.13	0.33	0.87	2.43	1.39	0.30	
PE	<i>c</i>	0.60	2.48	1.23	0.39	0.77	3.05	1.26	0.41	

Par: parámetro de la función Weibull; SD: desviación estándar; ME: método de momentos; MLE: método de máxima verosimilitud y PE: método de percentiles.

TABLA 4. Estadísticos de ajuste y validación de los métodos de estimación de los parámetros de la función Weibull.

Método	Ajuste (n=1970)					Validación (n=5187)				
	Bias	MAE	MSE	EI	K-S	Bias	MAE	MSE	EI	K-S
ME	0.015	0.039	0.003	0.168	59-(0)	0.011	0.038	0.002	0.350	98-(2)
MLE	-0.002	0.041	0.003	0.159	57-(2)	0.050	0.062	0.006	0.347	83-(17)
PE	0.023	0.044	0.004	0.169	59-(0)	0.029	0.061	0.016	0.349	94-(6)
PPE	0.015	0.040	0.003	0.166	59-(0)	0.006	0.040	0.003	0.336	95(5)

ME: método de momentos; MLE: método de máxima verosimilitud; PE: método de percentiles; PPE: método de predicción de parámetros; Bias: sesgo promedio; MAE: error medio absoluto; MSE: cuadrado medio del error; EI: índice de error y K-S: estadístico de Kolmogorov-Smirnov.

tivamente, sugieren un manejo de tipo incoetáneo, de acuerdo con el parámetro de forma (Bailey y Dell, 1973) con una asimetría positiva. Sin embargo, la mayoría de los parámetros estimados de escala y forma sugieren asimetría positiva en la mayoría de las parcelas, con menos árboles en las categorías diamétricas de más de 40 cm. Este mismo patrón fue encontrado por Nord-Larsen y Cao, (2006) en bosques coetáneos de Dinamarca.

Tanto en el ajuste como en la validación el método de PPE resultó casi equivalente a ME para estimar los parámetros de la función Weibull de acuerdo con la

prueba K-S. Esta razón justificó la elección para modelar los parámetros con variables de la parcela (diámetro mínimo, diámetro medio y diámetro cuadrático). En este caso no se usaron modelos no lineales pero no se descarta su uso pues estos han producido resultados satisfactorios como los encontrados por Gorgoso *et al.* (2007) en su estudio para *Betula alba* L. Sin embargo, los estadísticos de ajuste de los modelos que predicen los parámetros de la función Weibull (PPE) fueron superiores a los publicados por Nanang (1998), con valores del coeficiente de determinación de 0.91, 0.71 y 0.83

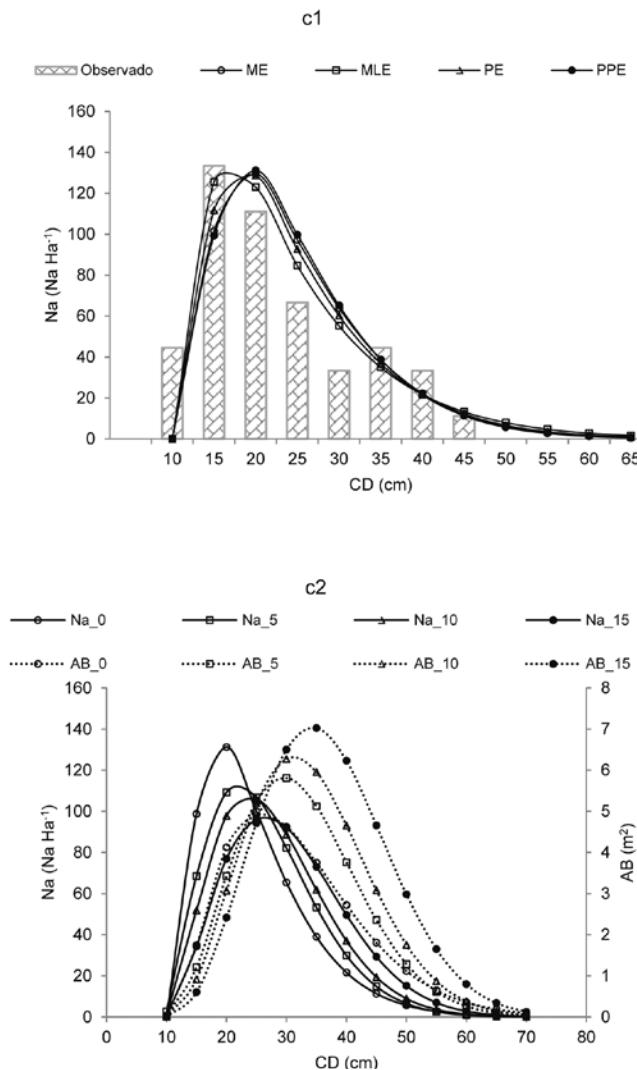


FIGURA 3. Distribuciones diamétricas por los métodos usados para la estimación de los parámetros de la función Weibull (c1) y proyección de la distribución de diámetros y área basal a 5, 10 y 15 años con PPE (d1).

para los parámetros de localización, escala y forma respectivamente.

Los resultados aquí obtenidos son muy similares a los obtenidos por Torres-Rojo *et al.* (2000) en la metodología que plantea para estimar los parámetros de la función Weibull. Para el parámetro de forma (expresión E3) con el uso del diámetro medio, diámetro cuadrático y diámetro mínimo, como variables de la parcela, se logró un ajuste con 90% de explicación de la varianza, considerando que

este parámetro se ha estimado con poca precisión con valores por abajo de 60% en otros estudios (Reynolds *et al.*, 1985; García *et al.*, 2002; Gorgoso *et al.* 2007).

El método de MLE fue el menos sesgado, mientras que PE fue el más sesgado y con la mayor variabilidad en el ajuste, resultados similares a los encontrados por Shiver (1988). Para la validación, PPE fue el menos sesgado y ME y PPE fueron los que menor variabilidad presentaron de acuerdo con el MSE. La estimación de los parámetros por PPE con variables de la parcela en el proceso de validación fue muy similar a los estimados por ME, el método PPE fue mejor que MLE y PE de acuerdo con los estadísticos usados (Bias, MAE, MSE, EI y K-S). El índice promedio de error (EI) ponderado por el área basal de las categorías diamétricas de cada parcela muestra que en el proceso de validación PPE es mejor que los demás métodos analizados, lo que evidencia la capacidad de estimación de los parámetros por predicción de parámetros.

La estimación de los parámetros por PPE a través de relaciones lineales con variables del rodal permiten obtener estimaciones eficientes de los valores de la función Weibull, además los parámetros pueden ser proyectados con ecuaciones dinámicas de las variables predictoras (Nanang, 1998; Lei, 2008).

Los resultados de este estudio permiten diferenciar que la estimación de los parámetros de la función Weibull por ME fue mejor que la estimación por MLE (Nanang, 1998), contrastando lo señalado por Shifley y Lentz (1985) que consideran mejor a MLE por precisión y mínima varianza en los estadísticos de ajuste. El método PE resultó inferior que ME, PPE y MLE, situación similar a la encontrada por Zarnoch y Dell (1985) y Nanang, (1998). Lei (2008) también encontró que la estimación por ME fue mejor que MLE y la obtenida por mínimos cuadrados ordinarios para *Pinus tabulaeformis* basado en el menor MSE. Vallejos-Barra *et al.* (2009) encontraron que el mejor método de estimación de los parámetros fue PE para *Pinus taeda*; mientras que Liu *et al.* (2004) mencionan para *Picea mariana* que el método PE presenta ventajas contra ME y PPE en términos de error, los resultados del estudio muestran que la función Weibull puede ser usada para



modelar las distribuciones diamétricas de las masas incoetáneas con mezcla de especies.

La predicción de parámetros (PPE) usando características de rodal como variables predictoras de los parámetros de localización, escala y forma de la función Weibull, representa una opción práctica, flexible y eficiente para modelar las estructuras diamétricas de las áreas estudiadas, la implementación es sencilla ya que las relaciones lineales de los parámetros consideran variables que comúnmente se miden o calculan en los inventarios forestales y en la ejecución de los programas de manejo forestal (Erikäinen y Maltamo, 2003).

La recuperación de los parámetros de la función Weibull vía ME resultó ser el método más eficiente y sugiere que las estructuras diamétricas de las masas mezcladas en términos generales tienen un comportamiento unimodal. El sistema construido es intrínsecamente incoetáneo pues se asume que a cada árbol se le puede estimar su edad a partir del diámetro. Esto es relevante ya que la filosofía de la función Weibull está centrada en la estimación de distribuciones diamétricas en masas coetáneas. Para el presente estudio la función Weibull se adaptó a las distribuciones de diámetros de las masas forestales bajo manejo irregular y que en pocos casos sigue una tendencia de j invertida, aunque en la proyección de las categorías diamétricas no se considera el reclutamiento ni la mortalidad, las formas de las curvas ejemplifican el cambio de las categorías diamétricas.

Con las ecuaciones dinámicas en forma ADA se pueden proyectar las variables de rodal (variables predictoras de los parámetros de la función Weibull) y la estimación de los parámetros para caracterizar las estructuras de diámetro y área basal futuras de forma dinámica. El presente trabajo se centró en ilustrar una estrategia de modelación dinámica de las distribuciones diamétricas de masas mezcladas, con los modelos dinámicos de atributos de la parcela o rodal y los modelos de predicción de los parámetros de la función Weibull se pueden proyectar las estructuras diamétricas de acuerdo con la dinámica de crecimiento del rodal y la implicación de tratamientos silvícolas, sin embargo, la limitante es que las proyecciones no conside-

ran la mortalidad y reclutamiento. La consideración de funciones de distribución bimodales para modelar las estructuras diamétricas de masas mezcladas de *Pinus* y el uso de ecuaciones dinámicas en diferencia algebraica generalizada (GADA) para la proyección, representa una opción muy interesante para trabajos futuros.

## RECONOCIMIENTOS

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Beca No. 247171) y al Programa Forestal del Colegio de Postgraduados para la realización de los estudios doctorales, así mismo se agradece al Ejido San Diego de Tezains, Durango, México, por la disponibilidad para el uso de la información.

## REFERENCIAS

- Álvarez, J. G. y A. D. Ruiz. 1998. Análisis y modelización de las distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* Ait. In Galicia. *Investigación Agraria. Sistemas y Recursos Forestales* 7(1 y 2):123-137.
- Amaro, A., D. Reed, M. Tome y I. Themido. 1998. Modeling dominant height growth: *Eucalyptus* plantations in Portugal. *Forest Science* 44(1):37-46.
- Bailey, R. L. y T. R. Dell. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science* 19(2):97-104.
- Borders, B. E. y W. D. Patterson. 1990. Projecting stands tables: A comparison of the Weibull diameter distribution method, a Percentile-Based projection method, and a basal area growth projection method. *Forest Science* 36(2):413-424.
- Cao, Q.V. 2004. Predicting parameters of Weibull function for modeling diameter distribution. *Forest Science* 50(5):682-685.
- Cao, Q.V. 2012. Use of the Weibull function to predict future diameter distributions from current plot data. In: J.R. Butnor, J. R. ed. 2012. Proceedings of the 16th biennial southern silvicultural research conference. e-Gen. Tech. Rep. SRS-156. Asheville, NC: U.S. Department of Agriculture Forest Service, Southern Research Station. p:53-58.

- Eerikäinen, K. y M. Maltamo. 2003. A percentile based basal area diameter distribution model for predicting the stand development of *Pinus kesiya* plantations in Zambia and Zimbabwe. *Forest Ecology and Management* 172(1):109-124.
- Fidalgo, T., C. Pacheco y B. R. Parresol. 2009. Describing maritime pine diameter distribution with Jhonson's  $S_B$  distribution using a new all-parameter recovery approach. *Forest Science* 55(4):367-373.
- García, C., N. Cañadas y G. Montero. 2002. Modelización de la distribución diamétrica de las masas de *Pinus pinea* L. de Valladolid (España) mediante la función Weibull. *Investigación Agraria. Sistemas y Recursos Forestales* 11(2):263-282.
- Gorgoso, J.J., J.G. Álvarez, A. Rojo y J.A. Garandas-Arias. 2007. Modeling diameter distributions of *Betula alba* L. stands in northwest Spain with the two-parameter Weibull function. *Investigación Agraria. Sistemas y Recursos Forestales* 16(2):113-123.
- Hyink, D.M. y J.W. Moser. 1983. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions. *Forest Science* 29(1):85-95.
- Kudus, K.A., M. I. Ahmad y J. Lopongan. 1999. Nonlinear regression approach to estimating Jhonson  $S_B$  parameters for diameter data. *Canadian Journal of Forest Research* 29(3):310-314.
- Lei, Y. 2008. Evaluation of three methods for estimating the Weibull distribution parameters of Chinese pine (*Pinus tabulaeformis*). *Journal of Forest Science* 54(12):566-571.
- Liu, Ch., S.Y. Zhang, Y.Lei, P.F. Newton y L. Zhang. 2004. Evaluation of three methods for predicting diameter distributions of black spruce (*Picea mariana*) plantations in central Canada. *Canadian Journal of Forest Research* 34(12):2424-2432.
- Maldonado, D. y J. Návar. 2002. Ajuste y predicción de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas De plantaciones de pino de Durango, México. *Madera y Bosques* 8(1):61-72.
- Nanang, D.M. 1998. Suitability of the Normal, Log-normal and Weibull distributions for fitting diameter distribu- tions of neem plantations in Northern Ghana. *Forest Ecology and Management* 103(1):1-7.
- Nord-Larsen, T. y Q.V. Cao. 2006. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. *Forest Ecology and Management* 231(1-3):218-225.
- Reynolds, M.R., T.E. Burk y W. Huang. 1988. Goodness-of-fit test and model selection procedures for diameter distribution models. *Forest Science* 34(2):373-399.
- SAS Institute Inc., 2011. SAS/ETS® 9.3 User's Guide. Cary, NC:, SAS Institute Inc.
- Shifley, S. y Lentz E. 1985. Quick estimation of the three parameters Weibull to describe tree size distributions. *Forest Ecology and Management* 13(3-4):195-203.
- Shiver, B. D. 1988. Sample sizes and estimation methods for the Weibull distribution for unthinned Slash Pine plantation diameter distributions. *Forest Science* 34(3):809-814.
- Torres-Rojo, J.M., O.S. Magaña-Torres, y M. Acosta-Mireles. 2000. Metodología para mejorar la predicción de parámetros de la distribuciones diamétricas (Ensayo). *Agrociencia* 34(5):627-637.
- Tsu, T.C., R.A. Mugele y F.A. McClintock. 1952. A discussion of "A statistical distribution function of wide applicability" by W. Weibull and S. Sweden. *Journal of Applied Mechanics* 19:233-234.
- Vallejos-Barra, O.S., D. Aedo-Ortiz, P.N. Izquierdo-Ossandon y M. Vázquez-Sandoval. 2009. Evaluación de procedimientos de ajuste óptimo de todos los parámetros de Weibull 3P para modelar la estructura horizontal en plantaciones de *Pinus taeda*. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*. 15(2):101-108.
- Weibull, W. 1939. The phenomenon of rupture in solids. Proc. Royal Swedish Institute of Engineering Research (Ingeniorvetenskaps Akademiens Handlingar) 153:1-55
- Weibull, W. y S. Sweden. 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics* 73:293-297.
- Zanakis, S.H. 1979. A simulation study of some simple estimators for the three-parameters Weibull distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 9(2):101-116.



Zhang, L., J.H. Gove, Ch. Liu y W.B. Leak. 2001. A finite of two Weibull distributions for modeling the diameter distributions of rotated-sigmoid, uneven-aged stands. *Canadian Journal of Forest Research* 31(9):1654-1659.

Zhang, L., K.C. Packard and Ch. Liu. 2003. A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Jhonson's  $S_B$  distributions to mixed spruce-fir stands in northeastern North America. *Canadian Journal of Forest Research* 33(7):1340-1347.

Zarnoch, S.J. y T.R. Dell. 1985. An evaluation of percentile and maximum likelihood estimator of Weibull parameter. *Forest Science* 31(1):260-268

Manuscrito recibido el 10 de enero de 2014.  
Aceptado el 9 de febrero de 2015.

Este documento se debe citar como:  
Quiñonez B., G., H.M. De los Santos P., F. Cruz C., A. Velázquez M., G. Ángeles P. y G. Ramírez V. 2015. Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en masas mezcladas de *Pinus* en Durango, México. *Madera y Bosques* 21(2):59-71.