



Revista de Ingeniería Sísmica

ISSN: 0185-092X

[javiles@tlaloc.imta.mx](mailto:javiles@tlaloc.imta.mx)

Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica

México

Miranda, Julio C.

Respuesta sísmica de componentes no estructurales en resonancia

Revista de Ingeniería Sísmica, núm. 78, enero-junio, 2008, pp. 1-22

Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica

Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=61807802>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## **RESPUESTA SÍSMICA DE COMPONENTES NO ESTRUCTURALES EN RESONANCIA**

*Julio C. Miranda*<sup>(1)</sup>

### **RESUMEN**

Este artículo describe un procedimiento aproximado para el cálculo práctico de la respuesta sísmica de componentes ligeras resonantes en edificios. Los sistemas mecánicos constituidos por las componentes y las estructuras portantes se suponen elásticos y de amortiguamiento clásico, de manera que se puede realizar un análisis modal tradicional. Con la finalidad de estimar el límite superior de la respuesta, el procedimiento supone que la componente está en resonancia con uno de los modos del edificio, y que puede ignorarse cualquier interacción con los modos restantes. Se toma en cuenta la correlación de los dos modos vecinos que resultan de la dinámica del sistema componente-edificio. De la confrontación de algunos resultados obtenidos con el procedimiento aproximado expuesto en este artículo, con resultados numéricos obtenidos por medio de programas comerciales, es posible comprobar que con el procedimiento, se puede calcular con éxito la respuesta de las componentes cuando están en resonancia con uno de los modos inferiores del edificio. Sin embargo, el procedimiento no es adecuado para calcular la respuesta de las componentes, cuando la resonancia ocurre con uno de los modos superiores de la estructura portante.

### **ABSTRACT**

This paper presents an approximate procedure for the practical calculation of the seismic response of light resonant building components. The mechanical systems composed by the components and the host structures are presumed to be elastic and classically damped, such that a traditional modal analysis can be carried out. Intended to estimate the upper limit of the response, the procedure assumes that the component is tuned to a building mode, its interaction with the other modes of the host building being ignored. The correlation of the two closely spaced modes resulting from the dynamics of the component-resonant building mode system is accounted for. Comparison of the results predicted by the approximate procedure of this paper, and some numerical applications, corroborates that the procedure is successful in predicting the response of the components when they are tuned to low order modes of the host structure. However, as also seen, the procedure is inappropriate to calculate the response of the components when the tuning of these involves higher modes of the host structure.

---

Artículo recibido el 18 de agosto de 2006 y aprobado para su publicación el 2 de julio de 2007. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

<sup>(1)</sup> Ingeniero Estructural, CH2M HILL, Departamento de Electrónica y Tecnología Avanzada, 1737 N. First Street, Suite 300, San Jose CA 95112, U.S.A., [julio.miranda@ch2m.com](mailto:julio.miranda@ch2m.com)

## INTRODUCCIÓN

La determinación de la respuesta de las componentes no estructurales adosadas a un edificio sometido a sismo es necesaria para el diseño de estas, así como para el diseño de su anclaje. Tal cálculo toma relevancia especial en caso de que las componentes se encuentren en resonancia con alguno de los modos de la estructura portante, pues es bien sabido que entonces su respuesta sísmica es muy pronunciada. En ciertos segmentos industriales, tales como el de la fabricación de microcircuitos electrónicos, el costo del equipo excede ampliamente el costo de la estructura que los alberga, por lo que es muy probable que su destrucción o mal funcionamiento como resultado de un evento sísmico resulte en importantes pérdidas monetarias. En otros segmentos, tales como el sector salud, la destrucción o falla funcional de algunas componentes no estructurales podría interrumpir las operaciones de las instalaciones en los momentos más críticos. En consecuencia, debido a su importancia, el tema ha sido objeto de mucha investigación. Por ejemplo, Penzien y Chopra (1965), estuvieron entre los primeros que exploraron el tema. Sackman y Kelly (1978) estudiaron sistemas interactivos componente-edificio y propusieron por primera vez métodos analíticos para evaluar la respuesta de estos a movimientos transitorios del suelo. Igusa y Der Kiureghian (1985) usaron métodos aleatorios para derivar analíticamente la respuesta de las componentes a ruidos blancos. No obstante estos estudios, ha sido muy lenta la migración de los resultados pertinentes hacia su codificación, reflejando sin duda lo complejo del tema. Por otra parte, aunque la respuesta de los sistemas mecánicos componente-edificio se puede obtener en principio por medio de cálculos de historia del tiempo, este enfoque requiere considerables recursos y tiempo, de manera que su aplicación en la práctica de la ingeniería estructural cotidiana no es aceptable. Así, para el cálculo práctico de las cargas sísmicas actuantes sobre las componentes soportadas por edificios, documentos como el Código Uniforme de Construcción (1997), -en inglés, Uniform Building Code-, proponen una fórmula empírica ajustada a registros de respuestas de piso obtenidas durante terremotos pasados, que abarca aproximadamente al 84% de los mismos. Esta fórmula, que provee aceleraciones proporcionales a la altura sobre la base del edificio, por su propia naturaleza es implícitamente aplicable a componentes esencialmente rígidas, definidas con período fundamental menor que 0.06 segundos. Dichas componentes, con base en la fórmula, pueden alcanzar una aceleración máxima en el tope del edificio de hasta cuatro veces la aceleración máxima del suelo. Para componentes con períodos largos, soportadas por ejemplo sobre dispositivos antivibratorios flexibles, la fórmula estipula una aceleración máxima al tope del edificio de hasta diez veces la aceleración máxima del suelo, es decir considera un factor de amplificación dinámica del movimiento del piso igual a 2.5. Para la determinación del coeficiente de amplificación correspondiente a períodos intermedios, el ingeniero debe usar su juicio. La fórmula, aunque de mucho valor práctico, admite varias críticas. Primero, debido a su origen estadístico ignora parámetros dinámicos básicos tales como períodos y amortiguamientos. Por otra parte, los registros en que está basada fueron obtenidos en los pisos de las estructuras, por lo tanto no reflejan las amplificaciones dinámicas de parte de las componentes en sí mismas. El factor de amplificación de 2.5 ya discutido, es un factor de consenso, no justificado.

Vista la fórmula arriba discutida, puesto que para propósitos de ingeniería lo que nos interesa es el borde superior de la respuesta, en este artículo se desarrollan aproximaciones de la respuesta de sistemas mecánicos componente-edificio resonantes, considerando que la masa de las componentes es muy pequeña en comparación a las masas equivalentes de los modos de vibración del edificio con los cuales resuenan. La plataforma analítica adoptada para este propósito apela a un modelo de energía modal relativa de sistemas con dos grados de libertad que ha sido previamente desarrollado por Miranda (2005), para el estudio de masas sintonizadas amortiguadas, usadas para la reducción de la respuesta sísmica de edificios. El modelo analítico derivado provee un análisis espectral del sistema mecánico componente-edificio, expresando con ecuaciones de forma simple que talvez pueden adaptarse para uso práctico. Para fines de confrontación con resultados numéricos, se considera el caso especial en que el amortiguamiento

de las componentes es igual al amortiguamiento del edificio. Se demuestra entonces lo idóneo de la fórmula de respuesta propuesta. Asimismo, estos resultados numéricos permiten discernir las condiciones en que el procedimiento que se propone provee resultados insatisfactorios. Si bien en este artículo enfatizamos el cálculo de la respuesta máxima en aceleración absoluta, los desplazamientos máximos y velocidades relativas máximas de las componentes se pueden obtener por simple substitución de los espectros respectivos en las ecuaciones de respuesta.

### DESARROLLO TEÓRICO

Aplicamos esta teoría a los sistemas mecánicos que pueden conceptualizarse como el sistema con dos grados de libertad mostrado en la figura 1, donde la parte superior representa una componente con masa  $M_U$ , constante de amortiguamiento  $C_U$  y rigidez horizontal  $K_U$ . Otra masa  $M_L$ , constante de amortiguamiento  $C_L$  y rigidez horizontal  $K_L$ , caracterizan la parte inferior, representando estos parámetros las propiedades efectivas del modo de vibración del edificio que se supone en resonancia con la componente. Por brevedad, de aquí en adelante y mientras no se preste a confusión, se designará a este modo como el “edificio”, del cual se discutirá más adelante la evaluación de sus propiedades efectivas. Es sabido que un estudio riguroso de este sistema requiere considerar modos y valores propios complejos en razón del amortiguamiento no clásico. No obstante, se discutirán también más adelante, las condiciones para las que los errores de cálculo de los amortiguamientos modales y de la respuesta de acuerdo a los procedimientos propuestos en este artículo, son menores y por lo tanto tolerables para propósitos de ingeniería práctica. Procedemos entonces a definir los siguientes parámetros:

$$\omega_U^2 = \frac{K_U}{M_U} \quad (1)$$

$$\omega_L^2 = \frac{K_L}{M_L} \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{\omega_U}{\omega_L} \quad (3)$$

$$\mu = \frac{M_U}{M_L} \quad (4)$$

La ecuación 1 provee la frecuencia circular de la componente cuando ésta se considera independientemente como un sistema con un grado de libertad. La ecuación 2 provee la frecuencia circular del edificio. La ecuación 3 representa una relación de frecuencias, llamada también relación de sintonía, entre las frecuencias circulares de la componente y del edificio. En el caso que nos ocupa, esta relación es igual a la unidad. La ecuación 4 representa la relación entre la masa de la componente y la masa del edificio. Con base en el trabajo de Miranda (2005), del cual se hace una breve presentación en apéndice, usamos consideraciones de energía modal relativa para estudiar el sistema representado en la figura 1. Definimos por lo tanto, las relaciones  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  como los cocientes entre las energías cinéticas y elásticas de la componente, con respecto a las mismas energías correspondientes del edificio, mientras el sistema componente-edificio vibra libremente en un modo  $X_j$ . Se demuestra en apéndice que estos cuatro parámetros están interrelacionados, de manera que la determinación de uno de ellos es suficiente para

definir el estado dinámico del sistema. Miranda (2005), identificó tres estados dinámicos específicos que se pueden usar para el estudio de nuestro problema:

**Balance perfecto de energía cinética modal entre la componente y el edificio:**

Para este caso se tiene:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \quad (5)$$

parámetros que de acuerdo a la ecuación A.6 corresponden a la relación de sintonía:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \quad (6)$$

**Resonancia entre la componente y el edificio:**

Para condición de resonancia se tiene:

$$\Omega = 1 \quad (7)$$

que de acuerdo a las ecuaciones A.5, A.6, A.8, y A.9, corresponde a los siguientes parámetros:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2} = \beta_2 = \frac{1}{\beta_1} = \left( \frac{\sqrt{4+\mu} + \sqrt{\mu}}{2} \right)^2 \quad (8)$$

**Balance perfecto de energía elástica modal entre la componente y el edificio:**

Para este caso se tiene:

$$\beta_1 = \beta_2 = 1 \quad (9)$$

que de acuerdo a la ecuación A.7 corresponde a la relación de sintonía:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \quad (10)$$

Puesto que las relaciones de masa consideradas son muy pequeñas, digamos del orden de 0.001, las relaciones de sintonía en las ecuaciones 6 y 10 indican que para estas condiciones energéticas especiales, para propósitos prácticos, se alcanza la resonancia de la misma manera que para la condición energética expresada por la ecuación 7. Por tanto, las ecuaciones 5, 8 y 9 indican que en o cerca de la resonancia, las componentes poseen aproximadamente la misma energía modal, sea cinética o elástica, que el edificio. Se justifica por lo tanto en tales circunstancias escribir la siguiente aproximación:

$$\alpha_1 \cong \alpha_2 \cong \beta_1 \cong \beta_2 \cong 1 \quad (11)$$

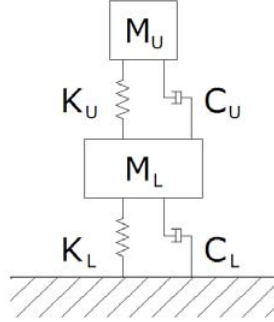


Figura 1. Sistema Mecánico

Se procede ahora con el cálculo espectral de la respuesta, observando que debido a la pequeñez de la relación de masas las dos frecuencias del sistema de la figura 1 estarán muy próximas entre sí. Por esta razón, usamos ecuaciones de doble sumatoria, Gupta (1990), para expresar la respuesta  $R$  como:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2\rho_{12}R_1R_2} \quad (12)$$

Los subíndices indican el orden de los modos del sistema componente-edificio. Debido a su forma simple, usamos el factor de correlación modal  $\rho_{12}$  propuesto por Rosenblueth y Elorduy (1969):

$$\rho_{12} = [1 + (\frac{\omega_1\sqrt{1-\xi_1^2} - \omega_2\sqrt{1-\xi_2^2}}{\hat{\xi}_1\omega_1 + \hat{\xi}_2\omega_2})^2]^{-1} \quad (13)$$

donde  $\omega_j$  y  $\xi_j$  representan las frecuencias circulares y los coeficientes de amortiguamiento respectivamente, para los modos del sistema componente-edificio. El coeficiente de amortiguamiento equivalente  $\hat{\xi}_j$  toma en cuenta la reducción de la respuesta en razón de la duración finita  $s$  de la señal de ruido blanco a la que se asimila el terremoto:

$$\hat{\xi}_j = \xi_j + \frac{2}{\omega_j s} \quad (14)$$

Suponiendo que los terremotos que se consideren sean suficientemente largos y que las frecuencias circulares sean tales que el producto  $\omega_j s$  sea mucho mayor que dos, el segundo término de la derecha en la ecuación 14 se puede despreciar, por lo que resulta que:

$$\hat{\xi}_j \cong \xi_j \quad (15)$$

Ignorando el acoplamiento debido al amortiguamiento no clásico, se demuestra en apéndice que con una aproximación de primer orden, el amortiguamiento modal viene dado por la ecuación A.17. Esta ecuación aplica siempre y cuando los amortiguamientos proporcionados separadamente por el edificio y la componente no sean marcadamente diferentes de lo establecido por la ecuación A.18. Así pues en resonancia, vista la ecuación 11, reescribimos la ecuación A.17 de la siguiente forma

$$\xi_j = \frac{1}{2} \frac{\omega_j}{\omega_L} (\xi_U + \xi_L) \quad (16)$$

Reemplazando esta expresión, mas las ecuaciones A.13 y A.14 en la 13, se obtiene:

$$\rho_{12} = \frac{(2 + \mu)^2 (\xi_U + \xi_L)^2}{8 + 4\mu + 2[(\xi_U + \xi_L)^2 - \sqrt{16 - 4(2 + \mu)(\xi_U + \xi_L)^2 + (\xi_U + \xi_L)^4}]} \quad (17)$$

Vistos los pequeños valores de la relación de masas, en general se tiene que  $\mu \ll 2$ . Entonces, tanto en el numerador como en el radical del denominador se puede ignorar la relación de masas respecto a dos, y por lo tanto el factor de correlación modal se puede aproximar como:

$$\rho_{12} = \frac{(\xi_U + \xi_L)^2}{\mu + (\xi_U + \xi_L)^2} \quad (18)$$

Se obtiene el mismo resultado si se hubiese usado el factor de correlación modal prescrito por el método del CQC, Der Kiureghian (1980). Suponiendo, por ejemplo, que  $\mu=0.001$ ,  $\xi_U=0.03$ , y  $\xi_L=0.05$ , la ecuación (18) resulta en un factor de correlación igual a 0.865. Para valores extremadamente reducidos de  $\mu$ , el factor de correlación es aproximadamente igual a la unidad.

Usando la ecuación A.9 con  $\alpha_j$  igual a uno y en resonancia, así como la ecuación A.12, se puede demostrar que para valores pequeños de la relación de masas, las frecuencias del sistema componente-edificio se pueden aproximar con las siguientes expresiones:

$$\frac{\omega_1}{\omega_L} = 1 - \frac{\sqrt{\mu}}{2} \quad (19)$$

y

$$\frac{\omega_2}{\omega_L} = 1 + \frac{\sqrt{\mu}}{2} \quad (20)$$

Observamos que las ecuaciones 19 y 20 avcinan por arriba y por abajo la frecuencia del edificio. Dada la proximidad entre estas dos frecuencias y dada la ecuación 16, se cometen errores pequeños si se hacen las siguientes aproximaciones:

$$A_1^2(\omega_1, \xi_1) \cong A_2^2(\omega_2, \xi_2) \cong A_1(\omega_1, \xi_1) A_2(\omega_2, \xi_2) \cong A^2(\omega_L, \frac{\xi_U + \xi_L}{2}) \quad (21)$$

donde los parámetros  $A_j$  son las ordenadas espectrales correspondientes a los dos modos, y  $A$  es la ordenada espectral correspondiente a la frecuencia de resonancia, para el promedio del amortiguamiento de la componente y del edificio. Se puede observar que esta última ordenada espectral corresponde a la frecuencia promedio de las frecuencias del sistema componente-edificio y al promedio de los amortiguamiento modales. Por otro lado, con valores de  $\beta_j$  cercanos a la unidad de acuerdo con la ecuación 11, los factores de participación expresados por las ecuaciones A.15 y A.16 se pueden aproximar como:

$$\gamma_1 \cong \gamma_2 \cong \frac{1}{2} \quad (22)$$

Dados los modos del sistema componente-edificio provistos por la ecuación A.3, para  $\alpha_j$  igual a uno, tomando además en cuenta la ecuación 12 podemos escribir que la aceleración máxima de la componente se puede aproximar como:

$$R_U = \frac{A(\omega_L, \frac{\xi_U + \xi_L}{2})}{\sqrt{2[\mu + (\xi_U + \xi_L)^2]}} \quad (23)$$

La ecuación 23 demuestra que la aceleración de la componente es igual al producto de la aceleración espectral por un factor de amplificación. Esta ecuación constituye el objetivo principal de este artículo, que por lo visto en el desarrollo teórico se aplica a sistemas componente-edificio en los que el efecto del amortiguamiento no proporcional es despreciable, para terremotos de larga duración, para productos  $\omega_j s$  mucho mayores que dos y para componentes resonantes con uno de los modos de la estructura portante. En la medida que las condiciones reales se alejen de estas suposiciones, la ecuación 23 perderá validez correspondientemente.

De manera similar derivamos la aceleración máxima del edificio:

$$R_L = \frac{\sqrt{\mu + 2(\xi_U + \xi_L)^2}}{\sqrt{2[\mu + (\xi_U + \xi_L)^2]}} A(\omega_L, \frac{\xi_U + \xi_L}{2}) \quad (24)$$

De la ecuación 24, vemos que se puede obtener una reducción potencial de la respuesta de edificios con poco amortiguamiento, por medio del efecto del amortiguamiento promedio sobre las ordenadas espectrales, si las componentes resonantes poseen alto amortiguamiento. Tal enfoque ha sido ya propuesto



por Villaverde (1985). Claramente se puede ver del desarrollo presentado arriba, como fue discutido por Miranda (2005), que esta condición es válida solamente para componentes resonantes muy pequeñas.

Es necesario juzgar la validez de la expresión 23 en razón de haber ignorado el acoplamiento de los modos debido al amortiguamiento no clásico. Para este propósito, Igusa y Der Kiureghian (1985), proponen un “parámetro de amortiguamiento no clásico”,  $\delta$ , que usando la nomenclatura del presente artículo se escribe:

$$\delta = (\xi_L - \frac{\xi_U}{\Omega}) \frac{1}{\Omega} \quad (25)$$

Estos autores calcularon la respuesta cuadrática media de componentes resonantes a un ruido blanco, en primera instancia de manera exacta, es decir tomando en cuenta los efectos del amortiguamiento no proporcional, y posteriormente de manera aproximada ignorando el acoplamiento resultante. Encontraron que dado un error  $e$ , se deben usar procedimientos exactos si:

$$\delta^2 > e[\mu + (\xi_U + \xi_L)^2] \quad (26)$$

Es decir que debemos usar procedimientos exactos si:

$$(\xi_L - \xi_U)^2 > e[\mu + (\xi_U + \xi_L)^2] \quad (27)$$

Se puede observar que si la ecuación A.18 se cumple, la ecuación 25 se vuelve idénticamente cero, y la ecuación 27 nunca se cumple pues el sistema estaría clásicamente amortiguado. A manera de ilustración, para valores de  $\mu=0.001$ ,  $\xi_U=0.03$ ,  $\xi_L=0.05$ , y aceptando un error en la respuesta,  $e$ , del 10%, el lado izquierdo de la ecuación 27 resulta de 0.0004, mientras que el lado derecho resulta de 0.00074. Entonces, para este caso en particular la ecuación 27 no se cumpliría, y la respuesta cuadrática media de la componente se podría aproximar ignorando el acoplamiento modal, dentro del error prescrito.

## RELACIÓN DE MASAS Y ACELERACIÓN ESPECTRAL EFECTIVAS

Se considera la figura 2, la cual representa una componente adosada al *i*ésimo grado de libertad lateral de una estructura con  $N$  grados de libertad. Esto contrasta con la figura 1, donde la componente se representa como adosada a un modo resonante de la estructura soportante. Para que ambas representaciones sean equivalentes para el estudio del problema que nos ocupa, la relación de masas y valores espectrales hasta ahora considerados, deben reemplazarse por valores *efectivos* correspondientes. Sackman y Kelly (1978), demostraron que estos valores están dados por;

$$\mu_{efectiva} = \frac{M_U(\phi_j^i)^2}{\phi_j^T M \phi_j} \quad (28)$$

y

$$A(\omega_L, \frac{\xi_L + \xi_U}{2})_{efectiva} = \varphi_j^i \frac{\varphi_j^T M r}{\varphi_j^T M \varphi_j} A(\omega_L, \frac{\xi_U + \xi_L}{2}) \quad (29)$$

donde  $\varphi_j$  es el modo resonante,  $\varphi_j^i$  es la  $i$ ésima coordenada de este modo a la cual está adosada la componente,  $M$  es la matriz de masas del edificio y  $r$  es un vector unitario. Se puede observar que  $\varphi_j^T M \varphi_j$  es la masa generalizada correspondiente al modo resonante y que  $\varphi_j^T M r / \varphi_j^T M \varphi_j$  es el factor de participación correspondiente. Es posible entonces comprender, que en todas las ecuaciones anteriores la relación de masas a considerar es la relación de masas efectiva de acuerdo a la ecuación 28 y que la aceleración espectral a considerar es la aceleración espectral efectiva de acuerdo a la ecuación 29. Puesto que el propósito es el de evaluar la respuesta máxima, la aceleración espectral efectiva debe siempre considerarse positiva.

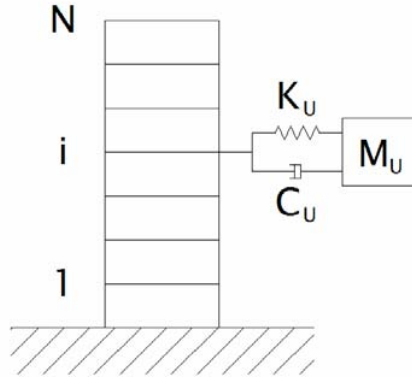


Figura 2. Sistema Componente-Edificio

### CONFRONTACIÓN CON RESULTADOS NUMÉRICOS

Para propósitos de confrontación con resultados numéricos, se supone que el amortiguamiento provisto por la componente es igual al del edificio. Esta suposición se hace dadas las limitaciones de los programas comerciales para análisis dinámico que se usan actualmente y no es una condición necesaria para el desarrollo del artículo. Aplicando tal igualdad, la respuesta viene dada en este caso particular por:

$$R_U = \frac{A(\omega_L, \xi_L)}{\sqrt{2(\mu + 4\xi_L^2)}} \quad (30)$$

y

$$R_L = \frac{\sqrt{\mu + 8\xi_L^2}}{\sqrt{2(\mu + 4\xi_L^2)}} A(\omega_L, \xi_L) \quad (31)$$

Obviamente la validez en la práctica de la suposición acerca de los amortiguamientos, es debatible. En general, es de esperar que el amortiguamiento del edificio supere el de la componente. Sin embargo, hay que notar que ahora las ecuaciones 30 y 31, aparte de todas las aproximaciones que se han hecho, son conceptualmente exactas puesto que cumplen con la ecuación A.18.

La figura 3 muestra un sistema con cuatro grados de libertad que representa la estructura soportante. Una vez adosada la componente al nivel superior, se obtiene el sistema con cinco grados de libertad que se muestra en la figura 4. Se usó el programa SAP90, (Wilson y Habibullah, 1990), para calcular la respuesta del sistema edificio-componente al espectro con amortiguamiento de 5% mostrado en la figura 5. Para las combinaciones de las respuestas modales SAP90 usa el método CQC, Der Kiureghian (1980), con la suposición de que todos los modos poseen el mismo amortiguamiento. Puesto que en principio la interacción es dominante con un solo modo del edificio, se espera que el amortiguamiento de los modos no-resonantes del edificio no tenga impacto apreciable sobre los resultados, y por tanto que la comparación de los resultados numéricos con la ecuación 30 sea permisible.

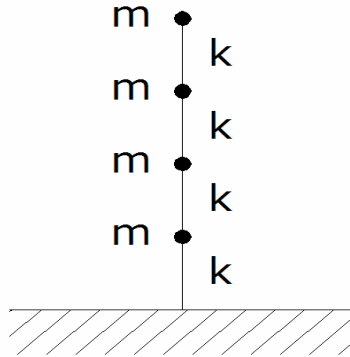


Figura 3. Sistema con 4 Grados de Libertad

El sistema con cinco grados de libertad antes descrito ha sido usado por Chopra (1995), página 490, para ilustrar la respuesta de edificios con masas adosadas ligeras. El ejemplo supone que cada una de las masas inferiores  $m$  es igual a 45.310559 toneladas (100 kips/g, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad) y que la rigidez lateral  $k$  de cada uno de los cuatro pisos inferiores es igual a 3957.0849 kN/m (22.599 kips/inch). El ejemplo también asume que la masa adosada es igual a  $0.01m$ , con rigidez lateral igual a  $0.0012k$  y que está por lo tanto en resonancia con el primer modo del edificio. Adicionalmente, para nuestros cálculos suponemos que la rigidez lateral de la componente es igual a  $0.010004k$ ,  $0.023473k$  y  $0.0353209k$ , a medida que entra secuencialmente en resonancia con el segundo, tercero y cuarto modo del edificio respectivamente. Los cálculos son llevados a cabo para  $\xi_U$  y  $\xi_L$  iguales a 0.05. De la misma manera, se supone que los modos no resonantes tienen un coeficiente de amortiguamiento de 0.05. Las características modales de la estructura portante con cuatro grados de libertad se muestran en la Tabla 1, donde se asigna como Nivel 4 al nivel superior, y los otros niveles son designados en orden decreciente de

arriba hacia abajo. Se puede observar que en esta tabla hemos normalizado los modos suponiendo la unidad en el tope de la estructura.

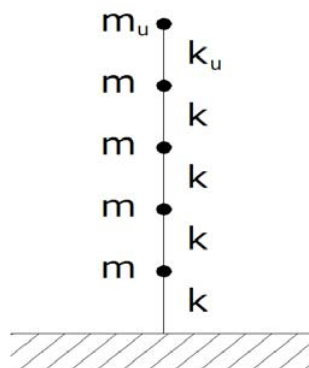


Figura 4. Sistema con 5 grados de libertad; componente adosada al último nivel.

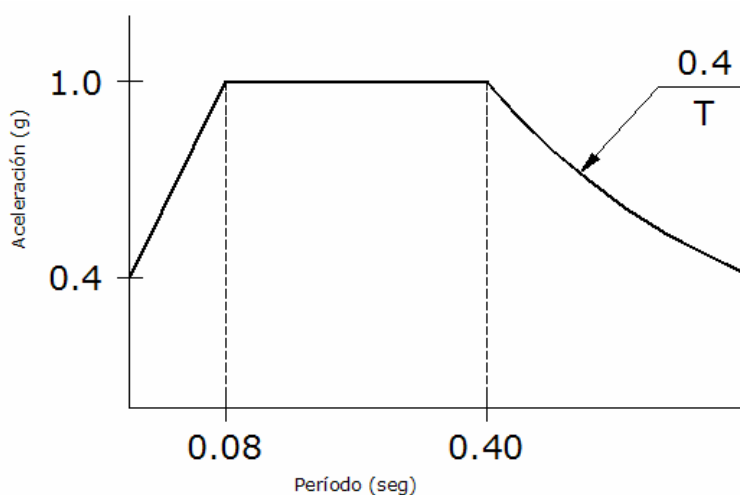


Figura 5. Espectro de Respuesta

La Tabla 2 muestra las relaciones de masas efectivas, correspondientes a cada modo del edificio. Vemos que para la componente adosada al nivel superior, las masas efectivas decrecen con el orden de los modos correspondientes. Se presentan en la Tabla 3, las características dinámicas del sistema componente-edificio para resonancia con el primer modo del edificio. Se asigna como Nivel 5 al nivel de la componente, y los otros niveles se asignan en orden decreciente. Se puede observar en esta tabla que en el tope de la estructura portante siempre se normalizan los modos con la unidad. Se evidencia que el efecto más importante de la componente es el de dividir el primer modo de la estructura en dos modos con frecuencias vecinas, que se denominaron modo 1.a y modo 1.b. Se puede verificar que las frecuencias de tales modos se aproximan a la frecuencia del primer modo del edificio desde arriba y abajo, de acuerdo con las siguientes formas modificadas de las ecuaciones 19 y 20:

$$\omega_{1,a} = (1 - \frac{\sqrt{\mu_{efectiva}}}{2})\omega_1 = 3.138830 \text{ rad / sec} \quad (32)$$

y

$$\omega_{1,b} = (1 + \frac{\sqrt{\mu_{efectiva}}}{2})\omega_1 = 3.351890 \text{ rad / sec} \quad (33)$$

Tabla 1: Características modales para el sistema mecánico con cuatro grados de libertad

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Nivel 4	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
Nivel 3	0.879385	0.000000	-1.347297	-2.532091
Nivel 2	0.652703	-1.000000	-0.532089	2.879388
Nivel 1	0.347296	-1.000000	1.532090	-1.879386
Período	1.936049	0.672383	0.438867	0.357767
Frecuencia	3.245360	9.34465	14.316800	17.562200
Circular				
Factor de Participación	1.241139	-0.333333	0.119858	-0.027663
Aceleración Espectral	0.207g	0.595g	0.911g	1.000g

Tabla 2: Relaciones de Masa Efectiva correspondientes a las características modales mostradas en la Tabla 1.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Rel. Masa Efectiva	0.004310	0.003333	0.001836	0.000520

Se observa también que el factor de participación del primer modo del edificio ha sido prácticamente dividido en dos, como se asume en la ecuación 22. Los modos, frecuencias y factores de participación de los tres modos restantes del edificio permanecen esencialmente inalterados, indicando que la interacción de la componente con estos modos es mínima. La confrontación entre los resultados arrojados por SAP90 y la respuesta de la componente calculada de acuerdo a la fórmula 30 se presenta en la Tabla 5. Se muestra en la segunda columna de esta tabla, que para resonancia con el primer modo del edificio la respuesta de la componente calculada con la fórmula 30 coincide con los resultados de SAP90.

En general, el comportamiento dinámico de los otros sistemas componente-edificio que resultan a medida que las componentes se consideran resonantes con los modos superiores, sigue el mismo patrón del primer modo tal como fue discutido arriba. Sin embargo, el efecto de interacción modal es aparente. El caso extremo ocurre cuando la componente está en resonancia con el cuarto modo del edificio, con resultados de características dinámicas mostradas en la Tabla 4. Se evidencia, por las amplitudes modales al nivel de la componente, que esta interactúa con todos los modos, en particular con el adyacente modo número tres.

### Respuesta sísmica de componentes no estructurales en resonancia

Tabla 3: Características modales para el sistema mecánico con cinco grados de libertad, con la componente en resonancia con el primer modo del edificio portante.

	Modo 1.a	Modo 1.b	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Nivel 5	16.293291	-14.238146	-0.136293	-0.053871	-0.035169
Nivel 4	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
Nivel 3	0.869013	0.889858	0.0009089	-1.346264	-2.530913
Nivel 2	0.640145	0.665433	-0.999092	-0.532135	2.877746
Nivel 1	0.339174	0.355548	-0.999546	1.531196	-1.878237
Período	2.003457	1.876233	0.672230	0.438845	0.357764
Frecuencia Circular	3.136170	3.34883	9.34678	14.3175	17.56240
Factor de Participación	0.610220	0.630871	-0.333312	0.119896	-0.027674

Siendo que la energía modal del edificio decrece en la medida que aumenta el orden de los modos, y puesto que la energía de las componentes resonantes está en balance con las energías modales, es de esperar que en consecuencia, se reduzca la respuesta de las componentes. Adicionalmente es de esperar que debido a su mayor energía, la influencia de los modos inferiores sobre los modos superiores en caso de interacción, sea importante para la respuesta de componentes resonantes con estos modos superiores. En el caso contrario, de componentes resonantes con los modos inferiores, se espera que la influencia de los modos superiores que puedan interactuar con los modos inferiores no sea muy importante debido a su inferior energía modal. Por tanto, se espera que la precisión de la ecuación 30 disminuya a medida que se incremente el orden de los modos resonantes.

Tabla 4: Características modales para el sistema mecánico con cinco grados de libertad, con la componente en resonancia con el cuarto modo del edificio portante.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4.a	Modo 4.b
Nivel 5	1.035193	1.392402	2.950530	61.009177	-31.917788
Nivel 4	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
Nivel 3	0.878678	-0.009261	-1.403880	-4.593768	-1.480066
Nivel 2	0.651846	-1.009304	-0.529721	5.772100	1.431379
Nivel 1	0.346741	-1.004684	1.581328	-3.915428	-0.871331
Período	1.940367	0.673934	0.440022	0.360736	0.352291
Frecuencia Circular	3.238140	9.323140	14.27920	17.41770	17.83520
Factor de Participación	1.240426	-0.331191	0.115982	-0.010438	-0.014778

Tabla 5; Comparación de la respuesta de la componente para  $\mu$  con los valores dados en la Tabla 2 y  $\xi_L = 0.05$ , para resonancia con cada modo de la estructura portante.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Resp. con SAP90	1.52g	1.25g	0.83g	0.51g
Resp. Eq. (30)	1.52g	1.21g	0.71g	0.19g
SAP90/Eq. (30)	1.00	1.03	1.17	2.68

En efecto, se verifica en la Tabla 5 que el cociente entre los resultados obtenidos con SAP90 respecto a los resultados propuestos por la ecuación 30, se incrementa de 1.0 para resonancia de la componente con el primer modo, hasta 2.68 para resonancia con el cuarto modo del edificio. La ecuación 30 subestima la respuesta cuando la componente entra en resonancia con los modos superiores. También se puede ver en la Tabla 5, que la respuesta de la componente se reduce a medida que el orden del modo resonante se incrementa. Para propósitos de ingeniería la precisión alcanzada en el cálculo de la respuesta con los dos primeros modos resonantes es muy buena, y podría argumentarse aceptable aun para el tercer modo resonante. Sin embargo la precisión alcanzada con el cuarto modo resonante es inaceptable.

Se considera ahora la figura 6, donde se muestra la componente adosada al segundo nivel de la estructura portante. Para este caso, en la Tabla 6 se muestran las relaciones de masas efectivas correspondientes. Se nota que las masas efectivas de los modos número dos y cuatro se incrementan en lugar de disminuir con el orden modal. En la Tabla 7, se presentan las características dinámicas de este sistema componente-edificio para resonancia con el primer modo del edificio. Los valores modales de la componente son listados en la segunda línea de la tabla. De nuevo se normalizan los modos con la unidad en el tope de la estructura portante. Se nota que el efecto más importante de la componente es el de dividir el primer modo de la estructura en dos modos con frecuencias vecinas. Se puede verificar que las frecuencias de tales modos se aproximan a la frecuencia del primer modo del edificio desde arriba y abajo, de acuerdo con las siguientes formas modificadas de las ecuaciones 19 y 20:

$$\omega_{1,a} = (1 - \frac{\sqrt{\mu_{efectiva}}}{2})\omega_1 = 3.175820 \text{ rad / sec} \quad (34)$$

y

$$\omega_{1,b} = (1 + \frac{\sqrt{\mu_{efectiva}}}{2})\omega_1 = 3.314890 \text{ rad / sec} \quad (35)$$

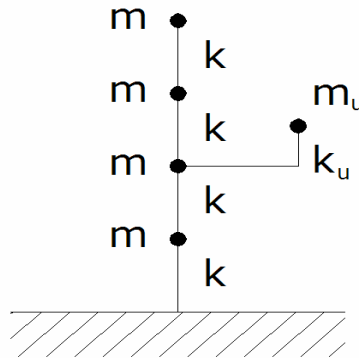


Figura 6. Sistema con 5 grados de libertad; componente adosada al segundo nivel.

## Respuesta sísmica de componentes no estructurales en resonancia

Se observa que el factor de participación del primer modo del edificio ha sido dividido aproximadamente en dos. Los modos, frecuencias y factores de participación de los tres modos restantes del edificio permanecen prácticamente inalterados, indicando que la interacción de la componente con estos modos es mínima. La confrontación entre los resultados calculados por SAP90 y la respuesta de la componente calculada de acuerdo a la fórmula 30 se presenta en la Tabla 9. Se muestra en la segunda columna de esta tabla, que para resonancia con el primer modo del edificio la respuesta de la componente calculada con la fórmula 30 coincide muy bien con los resultados de SAP90.

La concordancia de los resultados se degrada con el orden de los modos resonantes, debido al efecto de interacción modal. Para ilustrar este efecto, la Tabla 8 muestra las características dinámicas para la componente en resonancia con el cuarto modo del edificio. Se evidencia, por las cantidades listadas en la segunda fila de la tabla, que la componente interactúa con todos los modos, en particular con el adyacente modo número tres. Se verifica en la Tabla 9 que el cociente entre los resultados obtenidos con SAP90 respecto a los resultados propuestos por la ecuación 30, se incrementa desde 1.01 para resonancia de la componente con el primer modo hasta 1.83 para resonancia con el tercer modo del edificio. Es interesante que el cociente para resonancia con el cuarto modo resulte de 1.32 es decir hay un decremento con respecto al cociente de 1.83. Este valor se debe a la importancia relativa de la masa efectiva para resonancia de la componente con el cuarto modo. Observamos también que la ecuación 30 subestima la respuesta cuando la componente entra en resonancia con los modos superiores, aunque en menor grado que cuando la componente se adosa al nivel superior. También se puede ver en la Tabla 9, que en general la respuesta de la componente se reduce a medida que el orden del modo resonante se incrementa. La excepción es ahora para resonancia con el segundo modo, para el que la respuesta se incrementa con respecto a la del primer modo (1.23g con respecto a 1.10g). Para propósitos de ingeniería la precisión alcanzada en el cálculo de las respuesta con los dos primeros modos resonantes es muy buena. Sin embargo la precisión alcanzada para el tercer y cuarto modo resonante es inaceptable.

Tabla 6: Relaciones de Masa Efectiva correspondientes a las características modales mostradas en la Tabla 1, con la componente adosada al segundo nivel de la estructura portante.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Rel. Masa Efectiva	0.001836	0.003333	0.000520	0.004311

Tabla 7: Características modales para el sistema mecánico con cinco grados de libertad, con la componente en resonancia con el primer modo del edificio portante, y conectada al segundo nivel de la estructura portante.

	Modo 1.a	Modo 1.b	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Componente	16.761728	-13.848124	0.136355	0.028660	-0.101327
Nivel 4	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
Nivel 3	0.884780	0.874461	-0.000455	-1.347362	-2.532624
Nivel 2	0.667614	0.639144	-1.000454	-0.531978	2.881563
Nivel 1	0.354213	0.340975	-1.000909	1.531478	-1.880150
Período	1.980851	1.897703	0.672230	0.438861	0.357740
Frecuencia Circular	3.171960	3.310940	9.346780	14.31700	17.56350
Factor de Participación	0.595368	0.645590	-0.333161	0.119847	-0.027674



Tabla 8: Características modales para el sistema mecánico con cinco grados de libertad, con la componente en resonancia con el cuarto modo del edificio portante, y conectada al segundo nivel de la estructura portante.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4.a	Modo 4.b
Componente	0.676389	-1.385928	-1.599651	34.712873	-55.253198
Nivel 4	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
Nivel 3	0.879615	0.004619	-1.343666	-2.321634	-2.786341
Nivel 2	0.653335	-0.995359	-0.538226	2.068345	3.977372
Nivel 1	0.347590	-0.990781	1.566128	-1.564994	-2.226540
Período	1.937890	0.673941	0.439206	0.368927	0.345547
Frecuencia Circular	3.242280	9.323040	14.30580	17.0310	18.1833
Factor de Participación	1.241337	-0.332723	0.119896	-0.018721	-0.009789

Tabla 9; Comparación de la respuesta de la componente adosada al segundo nivel, para  $\mu$  con los valores dados en la Tabla 6 y  $\xi_L = 0.05$ , para resonancia con cada modo de la estructura portante.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Resp. con SAP90	1.10g	1.23g	0.73g	0.62g
Resp. Eq. (30)	1.09g	1.21g	0.40g	0.47g
SAP90/Eq. (30)	1.01	1.02	1.83	1.32

## CONCLUSIONES

Se presenta un modelo analítico aproximado para el estudio de la respuesta sísmica de componentes no estructurales ligeras resonantes con uno de los modos del edificio portante. Vista la pequeñez de la masa de las componentes en relación a la masa del modo resonante, se puede suponer que existe un perfecto balance energético modal entre la componente y el modo del edificio. Dado este comportamiento, un análisis espectral conduce a ecuaciones que predicen la respuesta de la componente en función de las propiedades dinámicas de las componentes en sí mismas y del modo resonante del edificio, obviando así la necesidad de efectuar cálculos de historia del tiempo. La confrontación con algunos resultados numéricos calculados para amortiguamientos iguales de la componente y del modo resonante del edificio, demuestra que con las ecuaciones derivadas en este artículo se puede predecir con precisión práctica, la respuesta de las componentes resonantes con los modos inferiores, cuya energía es dominante. No obstante, esta precisión disminuye cuando la resonancia de la componente involucra los modos de orden superior del edificio, en cuyo caso con las expresiones derivadas, se subestima substancialmente la respuesta. Se considera que esta pérdida de precisión se debe a la interacción de los modos inferiores del edificio, ricos en energía, con los modos superiores. Para estos casos es necesario desarrollar otros métodos analíticos que tomen en cuenta estos efectos, además de que este tema debe ser objeto de investigación adicional. Finalmente, creemos que las expresiones derivadas en este artículo, dentro de las limitaciones resultantes de las diferentes suposiciones hechas en su desarrollo, podrían adaptarse para su uso en códigos de construcción, proveyendo de esa manera ecuaciones racionales que sean al mismo tiempo suficientemente prácticas.

## APÉNDICE A

Se consideran los modos no amortiguados del sistema con dos grados de libertad mostrado en la Figura 1. Supongamos que vibra libremente en un modo  $X_j$ , y definamos  $\alpha_j$  como la relación entre la energía cinética impartida a la masa superior y la energía cinética de la masa inferior, tal que:

$$\alpha_j = \frac{M_U X_{Uj}^2}{M_L X_{Lj}^2} \quad (\text{A.1})$$

Definamos de manera similar  $\beta_j$  como la relación entre la energía elástica almacenada en el resorte superior y la energía elástica almacenada en el resorte inferior durante la vibración libre, tal que:

$$\beta_j = \frac{K_U (X_{Uj} - X_{Lj})^2}{K_L X_{Lj}^2} \quad (\text{A.2})$$

Si las componentes correspondientes a la masa inferior se normalizan como la unidad, de las dos ecuaciones anteriores podemos deducir los siguientes vectores modales:

$$X_j^T = \begin{bmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_j}{\mu}} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

o alternativamente

$$X_j^T = \begin{bmatrix} 1 \pm \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{\beta_j}{\mu}} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

En vista de que los modos son ortogonales con respecto a las matrices de masa y rigidez, las relaciones energéticas cumplen con las ecuaciones siguientes:

$$\alpha_1 \alpha_2 = 1 \quad (\text{A.5})$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{1 + \sqrt{\mu \alpha_1} - \sqrt{\mu \alpha_2} - \mu} \quad (\text{A.6})$$

$$\Omega = \frac{(\sqrt{\mu \beta_2} - \sqrt{\mu \beta_1}) + \sqrt{(\sqrt{\mu \beta_1} + \sqrt{\mu \beta_2})^2 + 4}}{2(1 + \mu)} \quad (\text{A.7})$$

y

$$\beta_1 \beta_2 = 1 \quad (\text{A.8})$$

De las ecuaciones A.3 y A.4, se nota que las relaciones energéticas están relacionadas entre si de la siguiente manera:

$$\beta_j = \Omega^2 (\sqrt{\alpha_j} \mp \sqrt{\mu})^2 \quad (\text{A.9})$$

Para sistemas conservadores, la máxima energía cinética modal  $E_K$  es igual a la máxima energía elástica modal  $E_S$ , y por tanto en términos de las energías de las componentes superiores e inferiores podemos escribir para el  $j$ avo modo:

$$(E_{KUj} + E_{KLj})_{\max.} = (E_{SUj} + E_{SLj})_{\max.} \quad (\text{A.10})$$

o

$$\omega_j^2 M_L (1 + \alpha_j) = K_L (1 + \beta_j) \quad (\text{A.11})$$

Así pues, obtenemos las frecuencias modales de la expresión siguiente:

$$\left(\frac{\omega_j}{\omega_L}\right)^2 = \frac{1 + \beta_j}{1 + \alpha_j} \quad (\text{A.12})$$

Se puede demostrar que las frecuencias modales cumplen con las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right) = \Omega \quad (\text{A.13})$$

y

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right)^2 = 1 + (1 + \mu)\Omega^2 \quad (\text{A.14})$$

Los factores de participación modal se pueden escribir como:

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\mu}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} = \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}} \quad (\text{A.15})$$

y

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} = \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}} \quad (\text{A.16})$$

Igualando la disipación de energía modal a la suma de las energías disipadas por cada una de las dos componentes, se puede demostrar que una aproximación de primer orden del amortiguamiento modal viene dada por la siguiente expresión:

$$\xi_j = \frac{\beta_j}{\Omega(1 + \beta_j)} \frac{\omega_j}{\omega_L} \xi_U + \frac{1}{(1 + \beta_j)} \frac{\omega_j}{\omega_L} \xi_L \quad (\text{A.17})$$

Miranda (2005), demostró que los términos fuera de la diagonal de la matriz de amortiguamiento en coordenadas modales son idénticamente cero si se cumple la siguiente relación:

$$\Omega = \frac{\xi_U}{\xi_L} \quad (\text{A.18})$$

Si tal fuera el caso, los vectores modales arriba derivados son capaces de desacoplar las ecuaciones del movimiento del sistema con dos grados de libertad que está bajo consideración. Es pertinente ahora discutir la aproximación alcanzada en la derivación del amortiguamiento modal. Con este propósito usamos un procedimiento propuesto por Adhikari y Woodhouse (2001), quienes a su vez se basaron en la obra de Rayleigh (1877). La ecuación homogénea de movimiento para el sistema que se estudia es:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = 0 \quad (\text{A.19})$$

donde  $M$  es la matriz de masa,  $C$  la de amortiguamiento, y  $K$  la de rigidez. El vector  $y(t)$  provee los desplazamientos relativos. Se busca una solución armónica de la forma  $y(t) = Z \exp[\lambda t]$ , donde  $Z$  es un modo complejo, y  $\lambda$  es una frecuencia natural compleja del sistema. La substitución de  $y(t)$  en la ecuación A-19 para el  $j$ avo modo, resulta en:

$$\lambda_j^2 MZ_j + \lambda_j CZ_j + KZ_j = 0 \quad (\text{A.20})$$

Siempre que las frecuencias y modos complejos estén “suficientemente cercanos” de las frecuencias y modos no amortiguados, un análisis de perturbación de primer orden se puede usar de manera a expresar:

$$Z_j = \sum_{l=1}^N \theta_l^j X_l \quad (\text{A.21})$$

donde

$$\theta_j^j = 1 \quad (\text{A.22})$$

y

$$|\theta_l^j| \ll 1 \text{ para } l \neq j \quad (\text{A.23})$$

Reemplazando (A.21) en (A.20), y premultiplicando por la transpuesta de  $X_k$ , tenemos:

$$\lambda_j^2 \sum_{l=1}^N \theta_l^j M_{kl} + \lambda_j \sum_{l=1}^N \theta_l^j C_{kl} + \sum_{l=1}^N \theta_l^j K_{kl} = 0 \quad (\text{A.24})$$

donde  $M_{kl}$ ,  $C_{kl}$ , y  $K_{kl}$  son los términos de las matrices generalizadas de masa, amortiguamiento, y rigidez respectivamente. De A.24 para  $k=j$ , tomando en consideración la ortogonalidad de los modos no amortiguados con respecto a las matrices de masa y rigidez, e ignorando términos de segundo orden asociados con los elementos fuera de la diagonal de la matriz de amortiguamiento, tenemos:

$$\lambda_j^2 M_{jj} + \lambda_j C_{jj} + K_{jj} \approx 0 \quad (\text{A.25})$$

Dividiendo por  $M_{jj}$ , y suponiendo que:

$$X_j^T C X_j = 2\xi_j \omega_j X_j^T M X_j \quad (\text{A.26})$$

obtenemos:

$$\lambda_j^2 + \lambda_j 2\xi_j \omega_j + \omega_j^2 \approx 0 \quad (\text{A.27})$$

lo que conduce a

$$\lambda_j \approx -\xi_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (\text{A.28})$$

Puesto que el lado derecho de la ecuación A-28 provee las frecuencias complejas exactas, se verifica entonces que la ecuación A.26 constituye una buena selección para expresar el amortiguamiento modal ya que conduce a una aproximación de primer orden de los valores exactos de las frecuencias. Para el caso en que  $k \neq j$  en A.24, y reteniendo solamente los términos de primer orden, tenemos:

$$\theta_k^j \approx \pm \frac{i \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_k^2} \frac{C_{kj}}{M_{kk}} \quad (\text{A.29})$$

Por tanto, de (A.21) podemos escribir:

$$Z_j \approx X_j \pm i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\omega_j}{\omega_j^2 - \omega_k^2} \frac{C_{kj}}{M_{kk}} X_k \quad (\text{A.30})$$

Se observa que, con una aproximación de primer orden, la parte real de los modos complejos es la misma que los modos no amortiguados, y que los términos fuera de la diagonal de la matriz de amortiguamiento generalizada son los responsables por las partes imaginarias. Para el sistema con dos grados de libertad que nos ocupa, después de las substituciones adecuadas tenemos:

$$Z_j \approx X_j \pm i \xi_k^c X_k \quad \text{para } k \neq j \quad (\text{A.31})$$

donde

$$\xi_k^c = \frac{2\alpha_k^{1/2}\beta_k^{1/2}}{(\alpha_k - \beta_k)(1 + \alpha_k)^{1/2}(1 + \beta_k)^{1/2}} \left( -\frac{\xi_U}{\Omega} + \xi_L \right) \quad (\text{A.32})$$

Vemos entonces, que si las propiedades del sistema son tales que la ecuación A-18 se cumple, la parte imaginaria de los vectores modales desaparece. La semejanza entre la ecuación A-32 y la A-17 es aparente. Por lo tanto, esta ecuación puede ser interpretada como el coeficiente de amortiguamiento acoplado para el javo modo, el cual dependiendo de los valores de  $\xi_U$  y  $\xi_L$  puede ser positivo o negativo. La ecuación A-32 indica que a menos que el amortiguamiento y la sintonía no difieran apreciablemente de la ecuación A-18, el uso de los modos complejos se requiere para el cálculo de la respuesta de los sistemas mecánicos bajo consideración. No obstante, las ecuaciones A-17 y A-28 demuestran que los cálculos de frecuencias y amortiguamientos usando los modos clásicos serán aproximaciones de primer orden de los valores exactos.

### ACLARACIÓN Y AGRADECIMIENTO

Los resultados, procedimientos, y opiniones arriba expresadas son de la responsabilidad exclusiva del autor, y no necesariamente representan la práctica de la compañía que lo emplea, CH2M HILL. El autor está agradecido a su hermano, Ing. Sergio Mario Miranda Mairena, por la acuciosa revisión gramatical del presente artículo.

### REFERENCIAS

- Adhikari, S y J Woodhouse (2001). "Identification of damping: part 1, viscous damping". *Journal Of Sound and Vibration*, Vol. 243, No. 1, pp. 43-61.
- Chopra, A (1995). *Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall.
- Der Kiureghian, A (1980). "A response spectrum method for random vibrations". *Reporte No. UCB/EERC-80/15*. Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley.
- Gupta, AK (1990). *Response spectrum method in seismic analysis and design of structures*, Blackwell Scientific Publications.
- Igusa, T y A Der Kiureghian (1985). "Dynamic characterization of two-degree-of-freedom equipment-structure systems". *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 111, No. 1.
- International Council of Building Officials (1997). "Uniform building code". Whittier, California.
- Rayleigh, (1877). *Theory of sound*, (dos volúmenes). New York: Dover Publications, 1945 re-issue, Segunda edición.
- Miranda, J C (2005). "On tuned mass dampers for reducing the seismic response of structures". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 34, pp. 847-865.
- Penzien, J y A Chopra (1965). "Earthquake response of appendages on a multistory building". *Memorias, 3<sup>rd</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, New Zealand, Vol. II.
- Rosenblueth, E y J Elorduy (1969). "Response of linear systems in certain transient disturbances". *Memorias, Fourth World Conference on Earthquake Engineering*, Santiago, Chile; A-1, pp. 185-196.

Sackman, J L y J M Kelly (1978). "Rational design methods for light equipment in structures subjected to ground motion". *Reporte No. UCB/EERC-78/19*. Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley.

Villaverde, R (1985). "Reduction in seismic response with heavily-damped vibration absorbers". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 13, pp. 33-42.

Wilson, E L y A Habibullah (1990). "SAP90, a series of computer programs for the static and dynamic finite element analysis of structures". *Computers & Structures*, Inc.