

Hernández Pérez, Disraeli; de los Santos Posadas, Héctor M.; Ángeles Pérez, Gregorio; Valdez Lazalde, J. René; Volke Haller, Víctor Hugo

FUNCIONES DE AHUSAMIENTO Y VOLUMEN COMERCIAL PARA *Pinus patula* Schltdl. et Cham. EN ZACUALTIPÁN, HIDALGO

Revista Mexicana de Ciencias Forestales, vol. 4, núm. 16, marzo-abril, 2013, pp. 34-45

Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias

Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=63433990004>



Revista Mexicana de Ciencias Forestales,

ISSN (Versión impresa): 2007-1132

ciencia.forestal2@inifap.gob.mx

Instituto Nacional de Investigaciones Forestales,
Agrícolas y Pecuarias

México



ARTÍCULO / ARTICLE

FUNCIONES DE AHUSAMIENTO Y VOLUMEN COMERCIAL PARA *Pinus patula* Schltdl. et Cham. EN ZACUALTIPÁN, HIDALGO

TAPER AND COMMERCIAL VOLUME SYSTEM FOR *Pinus patula* Schltdl. et Cham. IN ZACUALTIPÁN, HIDALGO STATE

Disraeli Hernández Pérez ¹, Héctor M. de los Santos Posadas ¹, Gregorio Ángeles Pérez ¹, J. René Valdez Lazalde ¹ y Víctor Hugo Volke Haller ²

RESUMEN

Se presenta un grupo de funciones de ahusamiento y volumen comercial de acuerdo con diversas variables para estimar el diámetro a diferentes alturas del fuste y el volumen total comercial, así como la distribución de productos maderables para *Pinus patula*, en rodales coetáneos repoblados bajo el sistema de Árboles Padre. Se cosecharon y midieron 78 árboles, en la cubicación se usó el método de trozas traslapadas que permite obtener volúmenes totales y parciales de manera más precisa. La base de datos se utilizó para ajustar 11 sistemas compatibles de ahusamiento-volumen, que incluyeron modelos segmentados. Todos los sistemas se ajustaron mediante la estimación simultánea de parámetros con el método de máxima verosimilitud e información completa que optimiza el ajuste y minimiza los errores de manera conjunta. El sistema segmentado resultó ser el más preciso en el ajuste y explica 97.06 y 98.09% de la variabilidad en el ahusamiento y en el volumen comercial variable, respectivamente. Los puntos de inflexión ocurren a 1.34 y 82.3% de la altura relativa sobre el fuste, lo que sugiere que bajo silvicultura intensiva los fustes son más cilíndricos que en rodales naturales sin manejo intensivo, donde los puntos de inflexión ocurren a 5.7 y 22.4% de altura relativa sobre el fuste.

Palabras clave: Ahusamiento, estimación simultánea, modelos segmentados, *Pinus patula* Schltdl. et Cham., sistema compatible, volumen comercial.

ABSTRACT

A group of taper and commercial volume functions to estimate diameter at different stem heights and total commercial volume, as well as the distribution of timber products for *Pinus patula* in even-aged regenerated stands under the seed tree method are described in this paper. Seventy eight trees were destructively sampled and measured, and bolt volumes were calculated with the overlapping bolt method which allows to get total and partial volumes in a more accurate way. Data base was used to fit 11 compatible taper-volume systems that included segmented models. All the systems were fitted by the simultaneous estimation of parameters by the with the maximum likelihood and full information method to optimize fitting while simultaneously minimizing the errors in a combined way. The segmented system proposed produced the best fit as it explains 97.06 and 98.09% of the taper and commercial volume variability. The inflection points were estimated at 1.34 and 82.3% of the relative total stem height, which suggests that under intensive forestry, tree stems become more cylindrical than in stands without intensive management, where the inflection points are estimated at 5.7 and 22.4% of relative total stem height.

Key words: Taper, simultaneous estimation, segmented models, *Pinus patula* Schltdl. et Cham., compatible system, commercial volume.

Fecha de recepción / date of receipt: 24 de noviembre de 2011. Fecha de aceptación / date of acceptance: 17 de enero de 2013

¹ Postgrado Forestal, Colegio de Postgraduados. Correo-e: hmsantos@colpos.mx.

² Postgrado Edafología, Colegio de Postgraduados.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se han desarrollado diversas ecuaciones para simular el perfil de fuste de los árboles, desde modelos simples de ahusamiento con base en proporciones, hasta estructuras geométricas y trigonométricas que incluyen modelos de tipo polinomial segmentado (Pompa *et al.*, 2009).

La compatibilidad entre funciones de volumen y ahusamiento fue desarrollada por Demaerschalk (1972), con el propósito de que las ecuaciones de ahusamiento compatible, cuando se integren, también sean representaciones realistas de modelos de volumen total y parcial. Cruz *et al.* (2008) citan que es posible definir un sistema compatible de ahusamiento-volumen a partir de los mismos parámetros y estructura geométrica; esta condición permite distribuir de forma porcentual el volumen por productos y eliminar las discrepancias existentes entre modelos de volumen total y comercial ajustados de manera separada. Si se desea evitar la integración de los modelos de ahusamiento, se pueden ajustar los de volumen comercial (Demaerschalk, 1972; Clutter, 1980; Cao *et al.*, 1980; Cruz *et al.*, 2008). Estas funciones, de forma intrínseca definen una ecuación de ahusamiento, lo que a su vez mediante integración matemática posibilita obtener una ecuación de volumen total compatible (Clutter, 1980; Pompa y Solís, 2008).

Cao *et al.* (1980) señalan que algunos estudios han mostrado que una ecuación de ahusamiento compleja, como las ecuaciones segmentadas, proporciona una mejor descripción del perfil fustal que una de ahusamiento simple. El ajuste se hace mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) o como un sistema de ecuaciones simultáneas (Cruz *et al.*, 2008). Si dos ecuaciones son compatibles implica que están relacionadas y, por tanto, los componentes del error están correlacionados; en este caso, el ajuste por MCO producirá estimadores teóricos robustos, pero que ignoran los errores que suceden de manera simultánea a lo largo del fuste entre el ahusamiento y el volumen comercial.

La teoría econométrica ofrece solución a ese problema a través del ajuste, de forma conjunta, del sistema compatible ahusamiento-volumen comercial con ecuaciones aparentemente no correlacionadas y máxima verosimilitud con información completa (SUR y FIML, respectivamente por sus siglas en inglés) donde los estimadores de los parámetros son consistentes, ya que se ajustan de forma simultánea el ahusamiento y volumen acumulado, lo cual representa una ventaja (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2000; Cruz *et al.*, 2008).

Por lo tanto, el objetivo del presente trabajo es buscar un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial variable para *Pinus patula* Schltdl. *et* Cham., especie que aporta el mayor volumen y valor de la producción maderable en la región de Zacualtipán, Hidalgo (Cruz *et al.*, 2010), en la que no se cuenta con

INTRODUCTION

In the last decades some equations have been developed to simulate the profile of the stems of trees, from simple taper models based on proportions, up to geometric and trigonometric structures that include models of segmented polynomial type (Pompa *et al.*, 2009).

The compatibility between volume and taper functions were developed by Demaerschalk (1972), in such a way that, when the compatible taper equations integrate, also are realistic representations of the total and partial volume. Cruz *et al.* (2008) quote that it is possible to define a compatible system of taper-volume from the same parameters and geometric structure; this condition allows to distribute in a percentage way, the volume by products and eliminate existent discrepancies between total volume and commercial volume models in a separate way. If it is desired to avoid the integration of taper models, those of commercial volume may be fitted (Demaerschalk, 1972; Clutter, 1980; Cao *et al.*, 1980; Cruz *et al.*, 2008). These functions, by themselves, define a taper equation, which, by a mathematical integration, make it possible to get a compatible total volume equation (Clutter, 1980; Pompa and Solís, 2008).

Cao *et al.* (1980) point out that some studies have showed that a complex taper equation, such as the segmented equations, provides a better description of the stem profile than a simple taper equation. Fitness is made by ordinary least squares (MCO, for its acronym in Spanish) or as a simultaneous equations system (Cruz *et al.*, 2008). If two equations are compatible, it means that they are related, and, therefore, the elements of the error are correlated; in this case, the fit by MCO will produce strong theoretical estimators, but that ignore the errors that occur simultaneously along the stem between tapering and the commercial volume.

The econometric theory offers a solution to this problem through fitness, in conjunction, of the tapering-commercial volume system with equations apparently not correlated and maximum likelihood with full information (SUR and FIML) where the estimator of the parameters are consistent as it simultaneously adjusts the taper and accumulated volume which represents an advantage (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2000; Cruz *et al.*, 2008).

Thus, the aim of this study was to find a compatible system of taper and variable commercial volume for *Pinus patula* Schltdl. *et* Cham., species that contributes the largest volume and value of timber production in the Zacualtipán region, Hidalgo state (Cruz *et al.*, 2010), where there is no standing cubing local system that optimizes the distribution of the products of the trees for the wooden forest inventory, previous to its harvest and industrialization.

un sistema local de ubicación en pie, que optimice el cálculo de la distribución de los productos del arbolado para el inventario forestal maderable, previo a su aprovechamiento e industrialización.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio

La investigación se realizó en rodales coetáneos de *Pinus patula* que están bajo manejo con el sistema de Árboles Padre en el ejido Atopixco, municipio Zacualtipán, Hidalgo, cuya superficie ejidal es de 1 170.97 ha y se ubica entre las coordenadas 20° 37' 26" N y 98° 37' 48" O; y 20° 35' 20" N y 98° 35' 23" O. Su orografía está conformada por pendientes, mesetas y cañones; la altitud media es de 2 100 m; predominio de un clima templado húmedo (C(m)) y templado subhúmedo (C(w₂)), con temperatura media anual entre 12 y 18 °C; la precipitación media anual oscila entre 700 y 2 050 mm (Cruz *et al.*, 2010).

Se obtuvo información de 78 árboles de *P. patula* dentro de las áreas de aprovechamiento con la técnica de Torres y Magaña (2001) en la que se indica que para mejorar el intervalo de los modelos es necesario captar toda la variabilidad de tamaños y formas posibles del arbolado en una región determinada. La toma de datos se realizó mediante un muestreo destructivo, con ayuda de la cinta métrica los individuos se seccionaron en trozas de un metro de longitud. Las variables registradas fueron diámetro normal, en centímetros (*D*); altura total, en metros (*H*); diámetro con corteza a diferentes alturas del fuste, en centímetros (*d*) y alturas para cada sección con respecto al suelo, en metros (*h*). Se registró un total de 1 695 pares de diámetro (*d*) y altura (*h*). La ubicación de cada muestra se efectuó con el método de trozas traslapadas, que permite estimar volúmenes totales y parciales, en metros cúbicos, (*V*) más precisos sin considerar el volumen del tocón (Bailey, 1995; Cruz *et al.*, 2008). Los valores medios de las variables en estudio se presentan en el Cuadro 1, además se indican la desviación estándar y los valores mínimos y máximos.

Modelos compatibles ahusamiento-volumen

Se analizaron 11 sistemas compatibles de ahusamiento-volumen seleccionados de la bibliografía, mismos que se clasificaron de acuerdo con su función de ahusamiento en modelos compatibles de ahusamiento-volumen y modelos compatibles ahusamiento-volumen segmentados.

El ahusamiento se basa en el supuesto de que la forma del árbol varía a lo largo de su longitud, y el diámetro sobre el fuste es monotónicamente decreciente a medida que la distancia del tocón a la punta comercial se aproxima a la altura total (Lee *et al.*, 2003). Para lograr una verdadera integración que describa de forma simultánea, tanto el perfil completo del

MATERIALS AND METHODS

Study area

The research was conducted in even-aged stands of *Pinus patula* which are under the seed tree management method in the Atopixco ejido municipality Zacualtipán, Hidalgo state whose surface is 1 170.97 ha and is located between the coordinates 20° 37' 26" 'N and 98° 37' 48" W, and 20° 35' 20" N and 98° 35' 23" W. The terrain consists of slopes, plateaus and canyons, the average altitude of 2 100 m; predominance of a humid temperate climate (C (m)) and subhumid temperate (C (w₂)), with mean annual temperature between 12 and 18° C, the average annual precipitation ranges from 700 to 2 050 mm (Cruz *et al.*, 2010).

Information was obtained from 78 trees of *P. patula* within harvesting areas with the technique of Torres and Magaña (2001) as stating that to improve the range of models needed to capture all the variability of possible shapes and sizes of trees in a given region. Data collection was performed by destructive sampling, using the tape measure individuals logs were cut into one meter in length. The variables recorded were normal diameter in inches (*D*), total height, in meters (*H*), diameter over bark stem at different heights, in inches (*d*) and heights for each section to the ground, in meters (*h*). There was a total of 1 695 pairs of diameter (*d*) and height (*h*). The measurements for each sample was performed using the method of overlapping logs, to estimate total and partial volumes in cubic meters, (*V*), more accurate without considering the stump volume (Bailey, 1995; Cruz *et al.*, 2008). The mean values of the study variables are presented in Table 1 also indicates the standard deviation and minimum and maximum values.

Cuadro 1. Valores estadísticos descriptivos de los datos de campo. Table 1. Statistical values that describe field data.

Variable	n	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
<i>D</i> (cm)	78	27.77	13.45	9.0	63.2
<i>d</i> (cm)	1 695	18.11	11.97	2.30	76.0
<i>H</i> (m)	78	10.27	7.18	10.15	31.0
<i>h</i> (m)	1 695	21.99	4.53	0.08	31.0
<i>V</i> (m ³)	78	0.517	0.67	0.005	3.98

D = diámetro normal (cm); *d* = diámetro a la altura *h* desde el nivel del tocón (cm); *H* = altura total del árbol (m); *h* = altura del fuste a partir del tocón (m); *V* = volumen de troza (m³).
D = diameter at breast height (cm), *d* = diameter at height *h* from stump level (cm), *H* = total tree height (m), *h* = height of the shaft from the stump (m), *V* = volume of log (m³).

árbol como el volumen se necesita un sistema que use los dos componentes: el ahusamiento y el volumen comercial variable, dada la estrecha relación de estos (Pompa *et al.*, 2009).

Modelos segmentados

Gallant y Fuller (1973) señalan que un modelo segmentado es uno de regresión que consiste en submodelos injertados; este sistema usa ecuaciones diferentes para distintas partes del fuste e integra tales modelos de forma que sus primeras derivadas son iguales en el punto de intersección (Torres y Magaña, 2001). Husch *et al.* (1982) citan en su trabajo estas funciones y asumen que el fuste de un árbol puede dividirse en tres formas geométricas básicas: cono, paraboloide y neiloide. Algunos modelos como los introducidos por Max y Burkhardt (1976) son de ese tipo, en un intento por dar una mejor descripción del perfil del árbol mediante una función de ahusamiento. Otros autores como Parresol (1987) y Fang *et al.* (2000) han usado esta variante con éxito y sus estructuras se analizan con los datos de campo del presente trabajo.

Las expresiones usadas cumplen con la condición de que $h = H$ cuando $d = 0$, por lo cual pueden emplearse para predecir diámetros (d) a cualquier altura sobre el fuste del árbol (h). Los sistemas evaluados (Cuadro 2) son: Lenhart y Cutter (1971); Clutter (1980); sistema compatible Cielito I, modificado por Cruz *et al.* (2008); Diéguez *et al.* (2006) plasman en su estudio para *Pinus silvestris* L., los siguientes modelos, que también se analizaron: Kozak *et al.* (1969); Demaerschalk (1972); Fang y Bailey (1999), con excepción del caso I-b (función compatible de ahusamiento-volumen); debido a que los datos no se ajustaron conforme a la expresión; dentro de los sistemas compatibles segmentados están los de Max y Burkhardt (1976); Parresol (1987) y Fang *et al.* (2000).

Cuadro 2. Sistemas compatibles ahusamiento-volumen analizados.
Table 2. Analyzed compatible taper-volume systems.

a. Funciones de ahusamiento	b. Funciones de volumen comercial
(1) Fang y Bailey, 1999 caso I - a	
$d = \sqrt{\frac{a_0}{\beta_0}} D^{a_1} H^{a_2 - k/\beta_0} h^{(k-\beta_0)/\beta_0}$	$V_c = e^{a_0} D^{a_1} H^{a_2 - \beta_0} d^{\beta_0} h$
(2) Fang y Bailey, 1999 caso II - a	
$d = \left[\frac{k(\beta_2 - 1)}{\beta_2 \beta_0} \ln h + \left(\frac{a_0 D^{a_1} H^{a_2}}{\beta_0} \right)^{1-1/\beta_2} \frac{k(\beta_2 - 1)}{\beta_2 \beta_0} \ln H \right]^{\frac{1}{(2\beta_2 - 2)}} h^{0.5}$	$V_c = e^{a_0} D^{a_1} H^{a_2 - \beta_0} d^{\beta_0} h^{\frac{\beta_0}{2}}$
(3) Fang y Bailey, 1999 caso II - b	
$d = \left[\frac{k(\beta_1 - 2)}{(\beta_1 - 2\beta_2)\beta_0} h^{1-2/\beta_2\beta_1} - H^{1-2/\beta_2\beta_1} + \left(\frac{a_0 D^{a_1} H^{a_2}}{\beta_0} \right)^{1-2/\beta_1} \right]^{\frac{1}{(\beta_1 - 2)}} h^{1/\beta_2\beta_1}$	$V_c = e^{a_0} D^{a_1} H^{a_2 - \beta_0} d^{\beta_0} h^{\beta_1}$

Continúa Cuadro 2...

Compatible taper-volume models

Eleven sets of taper-volume support selected from literature were analyzed; they were classified according to their function compatible models taper-compatible volume and taper-volume segmented models.

The taper is based on the assumption that the shape of the tree varies along its length, and the diameter of the shaft is monotonically decreasing as the distance from the tip stump commercial approaches the total height (Lee *et al.*, 2003). To achieve true integration that simultaneously describes both full profile and volume tree needed a system using two components: the taper and commercial volume variable given the close relationship of these (Pompa *et al.*, 2009).

Segmented models

Gallant and Fuller (1973) show that a model is a regression segmented consisting submodels grafted this system uses different equations for different parts of the shaft and integrates such models so that their first derivatives are equal in the point of intersection (Torres and Magaña, 2001). Husch *et al.* (1982) cite in their work these functions and assume the bole of a tree can be divided into three basic shapes: cone, paraboloid and neiloide. Some models such as those introduced by Max and Burkhardt (1976) are of this type, in an attempt to give a better description of the profile of the tree using a taper function. Other authors such as Parresol (1987) and Fang *et al.* (2000) have successfully used this variant and their structures were analyzed with the field data of the present study.

Expressions used comply with the condition that $h = H$ where $d = 0$, which can be used to predict diameters (d) at any height

Continuación Cuadro 2...

a. Funciones de ahusamiento	b. Funciones de volumen comercial
(4) Kozak <i>et al.</i> , 1969	
$d = D \sqrt{\beta_0 (q-1) + \beta_1 (q^2-1)}$	$V_c = \frac{1}{3} k D^2 \left(\frac{\beta_1}{H^2} \right) h^3 + \frac{1}{2} k D^2 \left(\frac{\beta_0}{H h^2} \right) + k D^2 (\beta_0 - \beta_1) h$
(5) Lenhart y Cutter, 1971	
$d = \left[D \left(\frac{H-h}{H-1.3} \right) \right]^{\frac{1}{\beta_1-2}}$	$V_c = e a_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} - \beta_0 \frac{d^{\beta_1}}{D^{\beta_1-2}} (H-1.3)$
(6) Demaerchalk, 1972	
$d = \sqrt{\beta_0 D^2 X^{\beta_1}}$	$V_c = \frac{k D^2 \beta_0}{\beta_1 + 1} \left[H - \frac{(H-h)^{\beta_1+1}}{h^{\beta_1}} \right]$
(7) Clutter, 1980	
$d = \left[\frac{k(H-h)}{\beta_0 a_0 a_1 - \beta_2 H^{\alpha_2}} \left(1 - \frac{2}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{\beta_1-2}} \right]^{\frac{1}{\beta_1-2}}$	$V_c = e a_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} (1 - \beta_0 d^{\beta_1} D^{\beta_2})$
(8) Cruz <i>et al.</i> , 2008	
$d = \sqrt{D^{\delta} (\beta_0 X + \beta_1 X^2 + \beta_2 X^3)}$	$V_c = k D^{\delta} H^{\gamma} \left\{ \beta_0 \left[\left(H h - \frac{h^2}{2} \right) - \left(H h_b - \frac{h_b^2}{2} \right) \right] \frac{\beta_1}{3 H} (H-h)^3 - (H-h_b)^3 \right. \\ \left. - \frac{\beta_2}{4 H^2} [(H-h)^4 - (H-h_b)^4] \right\}$
(9) Max y Burkhart, 1976	
$d = D \sqrt{\beta_1 (q-1) + \beta_2 (q^2-1) + \beta_3 (p_1 - q^2 l_1 + \beta_4 (p_2 - q^2 l_2)}$ donde $\begin{cases} l_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; \text{ de lo contrario } 0 \\ l_2 = 1 \text{ si } q \leq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$	$V_c = k D^2 H \left\{ \frac{\beta_2}{3} (q^3 - z_1^3) + \frac{\beta_1}{2} (q^2 - z_1^2) - (\beta_1 + \beta_2) (q - z_1) \right. \\ \left. - \frac{\beta_3}{3} [(p_1 - q^3) J_1 - (p_1 - z_1^3) K_1] \right. \\ \left. - \frac{\beta_4}{3} [(p_2 - q^3) J_2 - (p_2 - z_1^3) K_2] \right\}$ donde $\begin{cases} J_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; J_2 = 0 \text{ si } q > p_2 \\ K_2 = 1 \text{ si } q \leq p_1; K_2 = 0 \text{ si } z_1 > p_1 \end{cases}$
(10) Parresol 1987	
$d = D \sqrt{X^2 (\beta_1 + \beta_2 X) + (X - p_1)^2 [\beta_2 + \beta_4 (X - 2p_1) J_1]}$ donde $l_1 = 1 \text{ si } X \geq p_1; \text{ de lo contrario } 0$	$V_c = k D^2 H \left\{ \left(\frac{\beta_2 + \beta_4 J_1}{4 (X_4 - z_b^4)} + \frac{\beta_1 + \beta_3 J_1}{3 (X^3 - z_b^3)} + \left(\frac{2 \beta_1 (p_1 - l_1) + (2 p_1 \beta_4)}{2 (X^2 - z_b^2)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (p_1^2 - l_1 \beta_3) + (2 p_1 - \beta_4) (X^2 - z_b^2) \right) \right\}$
(11) Fang <i>et al.</i> , 2000	
$d = c_1 \sqrt{H^{\frac{k-\beta_1}{\beta_1}} (1-q)^{\frac{k-\beta_1}{\beta_1}} a_1^{l_1+1} a_2^{l_2}}$ donde $\begin{cases} l_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \\ l_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$ $\beta = \beta_1^{1-\theta_1+1/2} \beta_2^{l_1} \beta_1^{l_2} a_1 = (1-p_1) \frac{(\beta_2 - \beta_1)^k}{\beta_1 - \beta_2} a_1 = (1-p_2) \frac{(\beta_2 - \beta_1)^k}{\beta_2 - \beta_3}$	$r_0 = (1 - h_b/H)^{\frac{1}{\beta_1}} \quad r_1 = (1 - p_1)^{\frac{1}{\beta_1}} \quad r_2 = (1 - p_2)^{\frac{1}{\beta_1}}$ $c_1 = \sqrt{\frac{e a_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2 - \frac{1}{\beta_1}}}{\beta_1 (r_0 - r_1) + \beta_2 (r_1 - a_1 r_2) + \beta_3 a_1 r_2}}$ $V_c = c_1^2 H^{\frac{1}{\beta_1}} \left[\beta_1 r_0 + (l_1 + l_2) + (\beta_2 - \beta_1) r_1 + (l_2 (\beta_3 - \beta_2) a_1 r_2 \right. \\ \left. - \beta (1-q)^{\frac{1}{\beta_1}} a_1^{l_1+1} a_2^{l_2} \right]$

Donde, D = diámetro normal (cm); d = diámetro a la altura h desde el nivel del tocón (cm); H = altura total del árbol (m); h = altura del fuste a partir del tocón (m); h_b = altura del tocón (m); V_c = volumen comercial variable en (m³); $k = \pi/40000$; $\alpha_1, \beta_1, \delta, p_1, p_2$ = coeficientes a determinar mediante el ajuste; $h_1 = H-h$; $q = h/H$; $X = h_1/H$; $z_1 = h_b/H$; $z_b = (H-h_b)/H$; D = diameter at breast height (cm), d = diameter at height h from stump level (cm), H = total tree height (m), h = height of the shaft from the stump (m), h_b = height stump (m) V_c = variable trading volume (m3), $k = \pi/40000$; $\alpha_1, \beta_1, \delta, p_1, p_2$ = coefficients to be determined by adjusting, $h_1 = H-h$; $q = h/H$; $X = h_1/H$; $z_1 = h_b/H$; $z_b = (H-h_b)/H$.

Ajuste de los modelos

Si bien en algunos de los sistemas compatibles analizados no se tiene documentado uno de volumen comercial variable, existe un modelo de volumen total cuya estructura matemática es la de uno de forma constante $V = \alpha D^2 H$ (Kozak *et al.*, 1969; Demaerschak, 1972; Max y Burkhart 1976; Parresol, 1987), excepto el modelo de Cruz *et al.* (2008), el cual es de la forma $V = \alpha D^5 H$. Con base en lo anterior se analizaron las ecuaciones y se determinó que los sistemas de ahusamiento propuestos por Kozak *et al.* (1969); Demaerschak (1972) y Parresol (1987) generan expresiones de volumen comercial variable (Cuadro 2), que pueden ser utilizadas en conjunto con el ahusamiento en un ajuste de tipo simultáneo. Brooks *et al.* (2008) registran la ecuación de volumen comercial compatible para el modelo clásico de Max y Burkhart (1976). Para el caso de los sistemas con modelo de volumen total implícito: Lenhart y Clutter (1971); Clutter (1980); Fang y Bailey (1999); y Fang *et al.* 2000 se escaló el parámetro α_0 (para aumentar el tamaño absoluto del parámetro estadístico a evaluar) en el modelo de volumen total de Schumacher y Hall, con la función exponencial; esto ayudó a mejorar la estimación y, en consecuencia, a obtener de forma rápida la convergencia del sistema, además de mejorar la significancia de los estimadores.

Para evitar problemas en la estimación de los parámetros, en especial, cuando $h = H$; es decir, $d = 0$ se aplicó un valor pequeño en este punto ($\delta = 0.0001$), junto con una variable indicadora en la punta del árbol para evitar que se evaluaran en cero las derivadas parciales de los parámetros que contienen el logaritmo de cero, y que producen datos perdidos y problemas de convergencia; enfoque que fue empleado por Fang *et al.* (2000), y que le permitió el uso de todos los datos.

La estimación de los sistemas compatibles se realizó con la técnica de máxima verosimilitud con información completa (FIML, por sus siglas en inglés), la cual es apropiada para el ajuste simultáneo (SAS Institute, 2004). En el desarrollo de los modelos de regresión, el procedimiento asume que el error es independiente y que se distribuye de manera normal con varianza y media igual a cero (Gujarati, 2004); sin embargo, durante la estimación surgen problemas estadísticos que violan los supuestos básicos de regresión; sobre todo la heterocedasticidad, la autocorrelación y la colinealidad, inconvenientes importantes de los modelos de volumen (Kozak, 1997; Pompa *et al.*, 2009), ya que los parámetros se vuelven ineficientes; no hay garantía que sus errores estándar sean mínimos, aunque los parámetros estimados siguen siendo insesgados por haberse ajustado por mínimos cuadrados.

Los criterios para calificar la bondad de ajuste de los modelos se basan en un análisis numérico y de gráficos de los residuales. En el caso numérico se utilizaron tres estadísticos de uso frecuente en biometría: coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}), la raíz del cuadrado medio del error (RCME) y

on the bole of the tree (h). The systems tested (Table 2) are: Lenhart and Cutter (1971); Clutter (1980); Cielito I compatible system, modified by Cruz *et al.* (2008); Dieguez *et al.* (2006) in their study reflected *Pinus silvestris* L., the following models, which are also analyzed: Kozak *et al.* (1969); Demaerschak (1972); Fang and Bailey (1999); except in the Ib case (function compatible taper-volume), because the data were not adjusted according to the expression; inside segmented systems are compatible the Max and Burkhart (1976); Parresol (1987); and Fang *et al.* (2000).

Models Fit

Even if for some of the compatible systems analyzed there is not one known of variable commercial volume, there is a total volume model whose mathematical structure is consistently one $V = \alpha D^2 H$ (Kozak *et al.*, 1969; Demaerschak, 1972; Burkhart and Max, 1976; Parresol, 1987), except the Cruz *et al.* (2008) model, which is of the form $V = \alpha D^5 H$. Based on the above assumptions, equations were analyzed and it was found that taper systems proposed by Kozak *et al.* (1969); Demaerschak (1972) and Parresol (1987) generate variable commercial volume expressions (Table 2), which can be used in conjunction with the taper into a simultaneous type setting. Brooks *et al.* (2008) recorded trade volume equation compatible with the classical model of Max and Burkhart (1976). In the case of systems with total implicit model: Lenhart and Clutter (1971); Clutter (1980); Fang and Bailey (1999) and Fang *et al.* (2000) parameter α_0 climbed (to increase the absolute size statistic to evaluate) in the total volume model Schumacher and Hall, with the exponential function; this helped to improve the estimation and, consequently, to quickly obtain the convergence of the system, and improve the significance of the estimates.

To avoid problems in estimating the parameters, in particular, when $h = H$, i. e., $d = 0$ is applied to a small value at this point ($\delta = 0.0001$), along with an index variable in the top of the tree to avoid that evaluate to zero the partial derivatives of the parameters containing the logarithm of zero, and produce missing data and convergence issues; approach was used by Fang *et al.* (2000), which allowed the use of all data.

The estimate compatible systems was made with the technique of full information maximum likelihood (FIML, for its acronym in English), which is suitable for simultaneous adjustment (SAS Institute, 2004). In developing the regression models, the procedure assumes that the error is independent and normally distributed with variance and zero mean (Gujarati, 2004), however, problems arise during the estimation that violate the basic regression assumptions, especially heteroscedasticity, autocorrelation and collinearity important drawbacks of the volume models (Kozak, 1997; Pompa *et al.*, 2009), since the parameters become inefficient; there is no guarantee that their standard

el coeficiente de variación (CV) (Prodan *et al.*, 1997; Castedo y Álvarez, 2000; Diéguez *et al.*, 2003; Corral *et al.*, 2007):

$$R_2 adj = 1 - \left[\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \right] \left(\frac{n-1}{n-p} \right)$$

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-p}}$$

$$CV = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{n-1} \right)^2}{\bar{Y}}}$$

Donde:

\hat{Y}_i , \bar{Y}_i y Y_i = Valor predicho, media de la variable dependiente y valor observado respectivamente
 n = Número de observaciones
 p = Número de parámetros del modelo.

También se analizaron las gráficas de residuales contra los valores predichos de la variable dependiente, con la finalidad de detectar valores atípicos o tendencias inusuales de los datos. Esto es útil para determinar si los ajustes se adecuan a los datos o se presenta alguna falta de ajuste al sistema empleado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De los sistemas empleados, la función de ahusamiento, en algunos casos, se ajusta a los diámetros y en otros a los diámetros relativos (d/D); por lo tanto, se decidió ajustar todos los modelos como funciones directas del primer diámetro sobre el fuste, a fin de que los estadísticos del ajuste total (R^2_{adj} , RCME, CV) para esta variable fueran comparables entre modelos. El ajuste general de los sistemas, bajo la estimación simultánea, a partir de máxima verosimilitud con información completa (FIML) optimiza la predicción de los parámetros de ahusamiento y volumen comercial, además de ser significativos, minimiza los errores de manera conjunta (Cuadro 3). En contraste, cuando se realiza el ajuste de forma independiente, bajo mínimos cuadrados ordinarios (MCO), algunos parámetros presentan un $\alpha > 0.05$ y errores estándar más elevados, aun cuando se escale un parámetro dentro de la función (α_0). Lo anterior coincide con Borders (1989) y Fang *et al.* (2000), quienes señalan que el ajuste con FIML homogeniza y minimiza el error estándar de los parámetros y permite la compatibilidad total del sistema de ahusamiento y volumen comercial.



errors are minimal, even though the estimated parameters remain unbiased after having been adjusted by least squares.

The criteria to qualify the goodness of fit of the models are based on a numerical analysis and graphics of the residuals. In the numerical case three statistics often used in biometrics were applied: adjusted determination coefficient (R^2_{adj}), root mean square error (RMSE) and coefficient of variation (CV) (Prodan *et al.*, 1997; Castedo and Alvarez, 2000; Diéguez *et al.*, 2003, Corral *et al.*, 2007):

$$R_2 adj = 1 - \left[\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \right] \left(\frac{n-1}{n-p} \right)$$

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-p}}$$

$$CV = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{n-1} \right)^2}{\bar{Y}}}$$

Where:

\hat{Y}_i , \bar{Y}_i y Y_i = Predicted value of the dependent variable average and observed value, respectively
 n = Number of observations
 p = Number of model parameters.

Residual plots against predicted values of the dependent variable were analyzed too, in order to detect outliers or unusual data trends. This is useful to determine if adjustments are appropriate to the data or if there is a lack of adjustment features to the system used.

RESULTS AND DISCUSSION

From the systems used, the taper function, in some cases, adjusted to the diameters, and in others, the relative diameters (d/D); therefore, it was decided to adjust all models as direct functions of the first diameter of the shaft, so that the total fit statistics (R^2_{adj} , RMSE, CV) for this variable were comparable between models. The overall fit of the systems under simultaneous estimation, based on full information maximum likelihood (FIML) optimizes the prediction of the parameters of taper and commercial volume as well as being significant, minimizes errors together (Table 3). In contrast, when adjustment is performed independently under ordinary least squares (OLS), some parameters have an $\alpha > 0.05$ and higher standard errors, even when scaled a parameter within the function (α_0). This coincides with Borders (1989) and Fang *et al.* (2000), who note that the adjustment by FIML homogenizes and minimizes the standard error of the parameters and allows total compatibility of the taper and commercial volume system.

Even if in some models such as Fang *et al.* (2000) commercial volume there is collinearity in its parameters, which causes that

Cuadro 3. Valores y significancia estadística de los coeficientes calculados con ajuste compatible ahusamiento-volumen.
 Table 3. Values and statistical significance of the coefficients calculated with taper-volume compatible fit.

Sistema de volumen	Valores de los Parámetros en los modelos ajustados									
	α_0	α_1	α_2	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	p_1	p_2
Kozak <i>et al.</i> , 1969	ϵ^\dagger			-0.8403	0.0147					
	∞^\ddagger			0.0269	0.0212					
				<0.001	<0.001					
Lenhart y Clutter, 1971	ϵ	-9.2204	2.1041	0.4857	1.7×10^{-5}	3.4958				
	∞	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001				
Demaerschalk, 1972	ϵ			0.9604	1.47004					
	∞			0.00259	0.00545					
				<0.001	<0.001					
Clutter, 1980	ϵ	-9.6759	1.7972	1.0157	0.3397	3.0953	2.8827			
	∞	0.0854	0.0202	0.037	0.02	0.008	0.015			
		<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001			
Fang y Bailey, 1999	ϵ	-9.582	1.637	1.1853	6.1×10^{-5}	1.7618	1.088			
Caso II - b	ϵ	0.089	0.0212	0.0463	1.64×10^{-6}	0.017	0.021			
	∞	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001			
Fang y Bailey, 1999	ϵ	-9.9739	1.6869	1.2567	3.6×10^{-5}					
Caso I - a	ϵ	0.0847	0.0196	0.0437	1.83×10^{-7}					
	∞	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001					
Fang y Bailey, 1999	ϵ	-9.644	1.686	1.1524	5.2×10^{-5}	1.9205				
Caso II - a	ϵ	0.085	0.018	0.0428	1.23×10^{-6}	0.00415				
	∞	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001				
Cruz <i>et al.</i> , 2008	ϵ			2.286	-2.257	1.934				1.805
	∞			0.0818	0.195	0.1607				0.0077
				<0.001	<0.001	<0.001				<0.001
Max y Burkhart, 1976	ϵ			-3.5285	1.5	77.745	-1.6496	0.1076	0.8827	
	∞			0.0248		4.598	0.0390	0.0032	0.0138	
				<0.001		<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	
Parresol, 1987	ϵ	0.485		3.9778	-6.806	32.581	-8.2217			
	∞			0.0979	0.1281	0.2576	0.0643			
				<0.001	<0.001	<0.001	<0.001			
Fang <i>et al.</i> , 2000	ϵ	-10.47	1.704	1.375	1.34×10^{-6}	3.7×10^{-5}	3.4×10^{-5}	0.0134	0.8228	
	∞	0.0921	0.019	0.0467	5.80×10^{-8}	2.1×10^{-7}	1.3×10^{-6}	5.14×10^{-4}	0.0477	
		<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	

ϵ^\dagger = error estándar de los parámetros; ∞^\ddagger = nivel de significancia de los parámetros.

ϵ^\dagger = standard error of the parameters; ∞^\ddagger = significance level of the parameters.

Si bien, en algunos modelos como el de volumen comercial de Fang *et al.* (2000) existe colinealidad en sus parámetros, el cual provoca que algunos de ellos no sean estimables con facilidad, lo que se puede evitar al realizar el ajuste simultáneo del sistema segmentado. De igual forma, con el de Max y Burkhardt (1976) la solución implementada a que se llegó fue la de asignar al coeficiente β_2 un valor de 1.5 para lograr convergencia del sistema compatible, valor que se obtuvo, en parte, de lo registrado en la bibliografía, donde se hace referencia a un intervalo de 1.5 a 2; según datos de Max y Burkhardt (1976) en su trabajo para bosques naturales de pino en la costa de Virginia, y más reciente un estudio desarrollado en Turquía, que lo aborda como un sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial segmentado para tres especies (Brooks *et al.*, 2008).

En el Cuadro 4 se muestran los criterios estadísticos de ajuste para la selección del sistema que mejor explica la variabilidad de los datos de ahusamiento y volumen. Primero se seleccionaron los modelos que mejor ajustaban con base en su mayor coeficiente de determinación (R^2_{adj}), RCME más bajo y, finalmente, un bajo coeficiente de variación (CV), con respecto a la media de la variable dependiente.

En primer orden, el sistema que cumple con los criterios de selección fue el segmentado de Fang *et al.* (2000), seguido del propuesto por Max y Burkhardt (1976), también segmentado. La característica de ambos implica que tienen dos puntos de inflexión sobre la altura relativa del fuste. De los no segmentados, el Cielito I modificado por Cruz *et al.* (2008) resultó ser el más promisorio.

Cuadro 4. Bondad de ajuste de los sistemas ahusamiento-volumen.
Table 4. Goodness of fit of taper-volume systems.

Sistema de volumen	Ecuación de volumen comercial			Ecuación de Ahusamiento		
	RCME ¹	R^2_{adj}	CV [§]	RCME	R^2_{adj}	CV
Kozak <i>et al.</i> , 1969	0.0999	0.978	0.019	3.9791	0.8895	0.874
Lenhart y Clutter, 1971	0.2735	0.8347	0.145	3.5021	0.9144	0.677
Demaerschalk, 1972	0.1095	0.9734	0.023	3.8660	0.8957	0.825
Clutter, 1980	0.2751	0.8329	0.146	4.1516	0.8797	0.951
Fang y Bailey, 1999, caso I - a	0.2608	0.8497	0.131	3.4789	0.9155	0.668
Fang y Bailey, 1999, caso II - a	0.2291	0.884	0.101	3.4340	0.9177	0.651
Fang y Bailey, 1999, caso II - b	0.2112	0.9014	0.086	3.5919	0.910	0.712
Cruz <i>et al.</i> , 2008	0.0932	0.9808	0.017	3.3742	0.9206	0.628
Max y Burkhardt, 1976	0.1039	0.9762	0.021	2.2625	0.9643	0.232
Parresol, 1987	0.1594	0.9426	0.187	3.7250	0.8960	0.001
Fang <i>et al.</i> , 2000	0.0930	0.9809	0.016	2.050	0.9706	0.191

REMC= raíz del cuadrado medio del error; R^2_{adj} = coeficiente de determinación ajustado; CV [§]= coeficiente de variación.
REMC= root mean square error, R^2_{adj} = adjusted coefficient of determination; CV [§]= coefficient of variation.

some of them are not easily estimable, which can be avoided by performing simultaneous adjustment segmented system. Similarly, with Max and Burkhardt's (1976) the implemented solution that was reached was to assign a 1.5 value to the coefficient β_2 to achieve convergence of the compatible system, value that was obtained, in part, as recorded in the literature, where it refers to a range of 1.5 to 2; according to Max and Burkhardt (1976) in their work about pine natural forest on the coast of Virginia, and most recently, in a study conducted in Turkey, which addresses it as a compatible system of tapering -segmented commercial volume for three species (Brooks *et al.*, 2008).

Table 4 shows the fit statistics criteria for selecting the system that best explains the variability of taper and volume data. First were selected the models that best fit based on its higher coefficient of determination (R^2_{adj}), lowest RMSE, and, finally, a low coefficient of variation (CV), with respect to the average of the dependent variable.

In first order, the system that meets the selection criteria was the segmented of Fang *et al.* (2000), followed by that proposed by Max and Burkhardt (1976), segmented too. The characteristic of both implies that they have two inflection points on the relative height of the shaft. Of the non-segmented, the Cielito I adapted by Cruz *et al.* (2008) proved to be the most promising.

The inflection points for the first set (Fang *et al.*, 2000) occur at 1.34% of the height of the tree near the base, and 82.3% of the relative height of the shaft. For the second, from Burkhardt and Max (1976), the segments occurred at 10.7 and 88.3% of relative height. However, it is necessary to mention that for

Los puntos de inflexión para el primer sistema (Fang *et al.*, 2000) ocurren a 1.34% de la altura del árbol cerca de la base, y a 82.3% de la altura relativa sobre el fuste. Para el segundo de Max y Burkhardt (1976), los segmentos se presentan a 10.7 y 88.3% de altura relativa. No obstante, es necesario comentar que tanto para el modelo de Fang *et al.* (2000) como para el de Max y Burkhardt (1976), contrastados con trabajos anteriores, los puntos de inflexión no se relacionan; por ejemplo, Diéguez *et al.* (2006) para *Pinus sylvestris* L., en el noreste de España determinaron segmentos a 10.3 y 60.7% para el sistema de Fang *et al.* (2000) en la altura relativa del fuste y para el de Max y Burkhardt (1976) a 14 y 70% de altura relativa. En el caso particular del trabajo que se documenta el segundo punto de inflexión se calculó por arriba 80% de proporción de h/H . Lo anterior sugiere que tal vez un modelo segmentado con un solo punto de inflexión es más adecuado para modelar a *Pinus patula*. Si se toma en cuenta que los datos del estudio corresponden a individuos provenientes de un bosque natural manejado de forma intensiva y de rápido crecimiento, se aprecia que tiende a tener un factor de forma constante a lo largo del fuste comercial y, por tanto, a ser cilíndrico entre los puntos de inflexión estimados.

A fin de contrastar los resultados, se ajustó el modelo de Fang *et al.* (2000) a una base de datos integrada a partir de 91 árboles de *Pinus patula* con 1 039 pares de volumen comercial-ahusamiento obtenidos en rodales naturales recién abiertos al aprovechamiento en la Sierra de Juárez en Oaxaca. Bajo el mismo procedimiento los puntos de inflexión se localizan a 5.7% y 22.4% de altura relativa sobre el fuste, por lo que gran parte del volumen se concentra en una sección de estructura cónica, mientras que solo 16% en una estructura cilíndrica.

Aunque los estadísticos y sus indicadores son elementos esenciales para calificar la bondad de ajuste de un modelo, el análisis de los residuos es otro de criterio para decidir con mayor precisión cuál de ambos sistemas representa mejor la realidad que se busca modelar y, finalmente, servir como criterio para recomendar alguno de ellos. La tendencia que muestran los residuos del ahusamiento (Figura 1) frente a los valores predichos expone la presencia de cierto nivel de heterocedasticidad y autocorrelación; sin embargo, se decidió no corregir esta aparente violación a los supuestos básicos de regresión, a partir del nivel de ajuste total del sistema compatible (alta R^2_{adj} y coeficientes de regresión altamente significativos). Además, la investigación se efectuó para una sola especie con el enfoque de estimación del volumen comercial, y por la estructura matemática del sistema seleccionado pudiera no representar un problema grave sobre todo al comparar un modelo en su capacidad de predicción, la cual es su principal utilidad (Gujarati, 2004).

both, the model of Fang *et al.* (2000) as well as for the Max and Burkhardt (1976), contrasted with previous work, the turning points are not related; for example, Diéguez *et al.* (2006) for *Pinus sylvestris* L., in northeastern Spain, determined segments at 10.3 and 60.7% for the system of Fang *et al.* (2000) in the relative height of the stem and the Max and Burkhardt (1976), at 14 and 70% of relative height. In the particular case of this study, the second inflection point was calculated above 80% of h/H ratio. This suggests that perhaps a segmented model with a single inflection point is more appropriate to model *Pinus patula*. Taking into account that the survey data are individuals from a natural fast-growing forest intensively managed, it can be observed that it tends to have a constant form factor along the commercial bole and, therefore, to be cylindrical between the estimated turning points.

In order to compare the results, the Fang *et al.* (2000) model was adjusted to an integrated database from 91 trees of *Pinus patula* with 1 039 pairs of commercial taper volume obtained in natural stands newly opened to harvesting in the Sierra de Juárez in Oaxaca. Under the same procedure, the inflection points are located at 5.7% and 22.4% of relative height of the shaft, so that much of the volume is concentrated in one section of the conical structure, whereas only 16% in a cylindrical structure.

Although the statistics and indicators are essential to describe the goodness of fit of a model, the analysis of residuals is another element of judgment to decide more accurately which of the two systems better represents the reality to be modeled and, finally, serve as a criterion to recommend any of them. The trend shown by taper residues (Figure 1) compared to the predicted values, exposes the presence of some level of heteroscedasticity and autocorrelation, however, it was decided not to correct this apparent violation of the basic assumptions of regression, from the level of total fit of the compatible system (high R^2_{adj} and highly significant regression coefficients). In addition, research was conducted for a single species with a focus on commercial volume estimation, and from the mathematical structure of the selected system may not be a serious problem, especially when comparing a model in its prediction capability, which is its main utility (Gujarati, 2004).

By correcting for autocorrelation and heteroskedasticity it is pretended to improve the interpretation of the statistical properties of a model; therefore, when applying the parameter estimation in the presence of this violation, it practically does not vary in an exaggerated way in predicting taper and commercial volume. Diéguez *et al.* (2006) second order, and the absolute values of the parameters did not notably differ to fit without correction by autocorrelation.



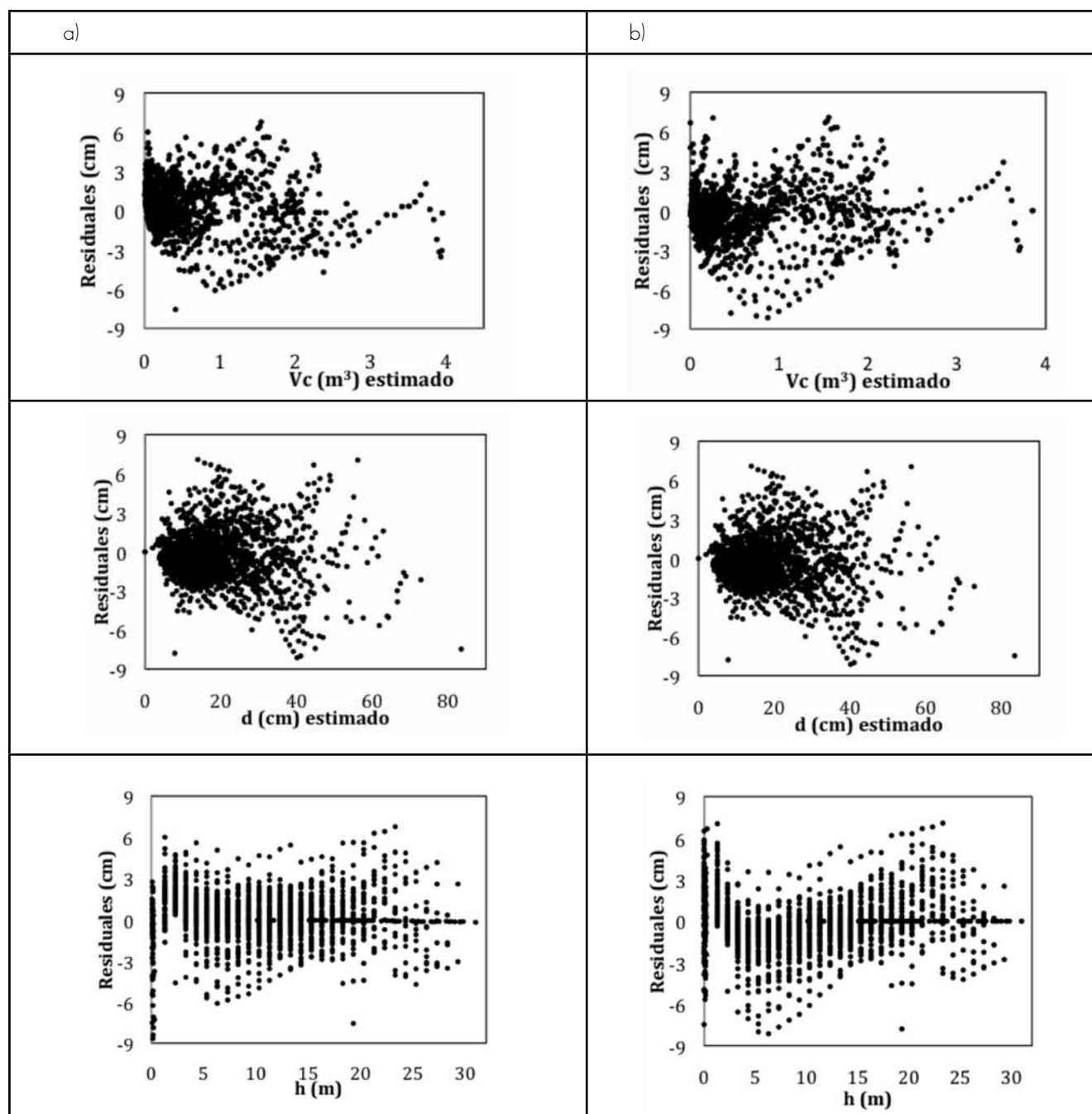


Figura 1. Gráfica de residuales de ahusamiento contra los valores predichos de volumen comercial (V_c) y diametro de fuste (d) y valores observados de altura sobre el fuste (h) para el sistema segmentado: a) Max y Burkhardt (1967); b) Fang *et al.* (2000).

Figure 1. Tapering residual plot against predicted values of commercial volume (V_c) and stem diameter (d) and observed values of height on the shaft (h) for the segmented system: a) Max and Burkhardt (1967); b) Fang *et al.* (2000).

Al corregir por autocorrelación y heterocedasticidad se busca mejorar la interpretación de las propiedades estadísticas de un modelo; por lo tanto, al aplicar la estimación de parámetros con presencia de esta violación, de manera práctica no varían de forma exagerada en la predicción del ahusamiento y el volumen comercial. Diéguez *et al.* (2006) en un trabajo para *Pinus sylvestris*, corrigieron el problema mediante el uso en los errores de una estructura auto regresiva de segundo orden, y

CONCLUSIONS

Of the 11 compatible systems of the taper-commercial volume that were surveyed, that of Fang *et al.* (2000) was the best fitting technique under FIML, as it expresses statistical robustness to predict volume and diameters of *Pinus patula*. First, it is consistent in estimating commercial volume and taper along the bole of each tree, as well as presenting high significance in

los valores absolutos de los parámetros no difirieron de manera notable al ajuste sin corrección por autocorrelación.

CONCLUSIONES

De los 11 sistemas compatibles de ahusamiento-volumen comercial explorados, el de Fang *et al.* (2000) fue el mejor bajo la técnica de ajuste FIML, pues expresa solidez estadística para predecir los volúmenes y diámetros de *Pinus patula*. En primer término, es consistente en la estimación de volumen comercial y ahusamiento a lo largo del fuste de cada árbol, además de presentar alta significancia en los valores estimados como otra aportación importante en su compatibilidad. En consecuencia, permite estimar de forma directa el diámetro a cualquier altura y viceversa; asimismo referir el volumen a una altura dada, o a un diámetro conocido.

Con los sistemas ilustrados se da la opción de que los manejadores de los bosques coetáneos de la región cuenten con una herramienta más eficiente para el cálculo de la distribución de productos maderables para determinar el valor y uso adecuado de la materia prima de los bosques bajo aprovechamiento. Al contrastar la forma del fuste es evidente que el régimen de manejo afecta la distribución de productos y esta es altamente dependiente de la localidad y de la silvicultura implementada.

REFERENCIAS

- Bailey, R. L. 1995. Upper-stem volumes from stem-analysis data: an overlapping bolts method. *Can. J. For. Res.* 25: 170-173.
- Borders, B. E. 1989. Systems of equations in forest stand modeling. *For. Sci.* 35: 548-556.
- Brooks R. J., L. Jiang and R. Ozgelik. 2008. Compatible stem volume and taper equations for Brutian pine, Cedar of Lebanon, and Cilicica fir in Turkey. *Forest Ecology and Management* 256: 147-151.
- Cao Q., V., H. Burkhart and T. Max. 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction for loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26: 71-80.
- Castedo D., F. y G. Álvarez J. 2000. Construcción de una tarifa de cubicación con clasificación de productos para *Pinus radiata* D. Don, en Galicia basado en una función de perfil del tronco. *Invest. Agrar. Recur. For.* 9: 253 - 268.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *For. Sci.* 26: 117-120.
- Corral R., J. J., M. Barrio A., A. O. Aguirre C. and U. Diéguez A. 2007. Use of stump diameter to estimate diameter at breast height and tree volume for major pine species in El Salto, Durango (México). *Forestry* 80: 29-40.
- Cruz C., F., H. M. De los Santos P. y J. R. Valdez L. 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia* 42: 473-485.
- Cruz L., I. A., J. R. Valdez L., G. Ángeles P. y H. M. de los Santos P. 2010. Modelación espacial de área basal y volumen de madera en bosques manejados de *Pinus patula* y *P. teocote* en el ejido Atopixco, Hidalgo. *Madera y Bosque* 16: 75-97.
- Demaerschalk, J. P. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *For. Sci.* 18: 241-245.
- Diéguez A., U., M. Barrio A., F. Castedo D. y M. Balboa M. 2003. Estimación del diámetro normal y del volumen del tronco a partir de las dimensiones del tocón para seis especies forestales comerciales de Galicia. *Invest. Agrar. Sist. Recur. For.* 12: 131-139.
- Diéguez A., U., F. Castedo D., J. G. Álvarez G. y A. Rojo. 2006. Compatible taper function for Scotts pine plantations in northwestern Spain. *Can. J. For. Res.* 36: 1190-1205.

the estimates as an additional major input in its compatibility. Therefore, it makes it possible to estimate directly the diameter at any height and at any diameter and height in the same way, refer to the volume to a given height or a known diameter.

With the systems described here, the option is given for even-aged forest managers of the region by providing a more efficient tool to calculate the distribution of timber, and thus, to determine the value and proper use of the raw material from forests under exploitation. By contrasting the stem form it becomes evident that the management regime affects the distribution of products and this is highly dependent on the location and forestry implemented.

End of the English version



- Fang, Z. and R. L. Bailey. 1999. Compatible volume and taper models with coefficients for tropical species on Hainan Island in Southern China. *For. Sci.* 45: 85-100.
- Fang, Z., B. E. Borders and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *For. Sci.* 46: 1-12.
- Gallant, A. R. and W. A. Fuller. 1973. Fitting segmented polynomial regression models whose join points have to be estimated. *Journal of the American Statistical Association* 68: 144-147.
- Gujarati, N. D. 2004. Violación de los supuestos del modelo clásico. Traducción al español de Garmendia G., D., Arango M. G. y M. Misas A. In: McGraw Hill Interamericana de México (ed.), *Econometría*. México, D.F. México. pp. 327-538.
- Husch, B., C. I. Miller and T. W. Beers. 1982. *Forest mensuration*. 3rd ed. Krieger Publishing Company, Malabar, FL USA. 402 p.
- Kozak, A., D. Munro and J. Smith. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. *For. Chron.* 45: 278-283.
- Kozak, A. 1997. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. *Can. J. For. Res.* 27: 619-629.
- Lee, W. K., J. H. Seo, M. Y. Son, K. H. Lee and K. Gadow. 2003. Modeling stem profiles for *Pinus densiflora* in Korea. *Forest Ecology and Management* 172: 69-77.
- Lerhart, J. P. and J. L. Clutter. 1971. Cubic-foot yield tables for old-field loblolly pine plantations in the Georgia Piedmont. *Ga. For. Res. Council Rep.* 22: 12.
- Max, T. A. and H. E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *For. Sci.* 22: 283-289.
- Parresol, B. R., J. E. Hotvedt and Q. V. Cao. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Can. J. For. Res.* 17: 250-259.
- Pompa G., M., J. J. Corral R., M. A. Díaz V. y M. Martínez S. 2009. Función de ahusamiento y volumen compatible para *Pinus arizonica* Engelm. en el suroeste de Chihuahua. *Rev. Cien. For. en Méx.* 34: 119-136.
- Pompa G., M. y R. Solís M. 2008. Ecuación de volumen para el género *Quercus* en la región noroeste de Chihuahua, México. *Revista de Ciencias Forestales* 16: 84-93.
- Prodan, M., R. Peters, F. Cox and P. Real. 1997. *Mensura forestal*. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA), Costa Rica. 561 p.
- SAS Institute Inc. 2004. *SAS/C Online Do²*, Release 7.50. Cary, NC. USA s/p.
- Torres R., J. M. y O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de plantaciones forestales. Ed. Limusa. México, D. F. México. 472 p.