EccoS Revista Científica
ISSN: 1517-1949
eccos@uninove.br
Universidade Nove de Julho
Brasil

Schuwartz Faria, Rejane Waiandt; Maltempi, Marcus Vinicius
Padrões Fractais: conectando Matemática e Arte
EccoS Revista Científica, núm. 27, enero-abril, 2012, pp. 33-53
Universidade Nove de Julho
São Paulo, Brasil

doi: 10.5585/EccoS.n27.3484

Padrões Fractais: conectando Matemática e Arte

Fractal Patterns: Connecting Math and Art

Rejane Waiandt Schuwartz Faria
Mestre em Educação Matemática – UNESP/Rio Claro-SP (2012);
Professora da Rede Municipal de Ensino de Rio Claro;
Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e
Educação Matemática (GPIMEM).
Rio Claro, SP – Brasil.
rejanefaria1@hotmail.com

Marcus Vinicius Maltempi
Doutor em Engenharia Elétrica e de Computação – UNICAMP (2000);
Pós-Doutorado em Educação Matemática, Universidade de Londres, Inglaterra;
Professor do Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação e do
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/Rio Claro, SP;
Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e
Educação Matemática (GPIMEM).
Rio Claro, SP – Brasil.
maltempi@rc.unesp.br

Resumo: Neste artigo, temos por objetivo apresentar o conceito de Padrão Fractal e seu potencial no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, com ênfase em aspectos visuais e artísticos. Discutimos a ideia de que tanto a Matemática quanto a Arte estão atreladas às atividades humanas com manifestações oriundas da inteligência, dos anseios, das ideias e das necessidades de expressão. Essas formas de expressão nos remetem ao dinamismo, rigor, criatividade, estética, harmonia, simetria e a muitos outros conceitos que estão presentes na Arte, na Matemática e nos Padrões Fractais. Todos os Padrões Fractais possuem as propriedades autossimilaridade e complexidade infinita que são visuais e proporcionam a sensação de surpresa e a contemplação da estética nas regularidades presentes na aparente irregularidade desses padrões.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Fractal. Padrões visuais.

Abstract: The main aim in this paper is to introduce the concept of fractal pattern and its potential in teaching and learning of mathematical content, with emphasis on visual and artistic aspects. We explore the idea that both Math and Arts are linked to human activities with expressions derived from intelligence, wishes, ideas and needs of expression. These expressions lead us to the dynamism, rigor, creativity, aesthetics, harmony, symmetry and many other concepts that are present in Arts, Mathematics and Fractal Patterns. Self similarity and infinite complexity are visual properties of the Fractals Patterns that provide the feeling of surprise and the aesthetic contemplation of the regularities present in the apparent irregularity of these patterns.

Key words: Fractal. Mathematics Education. Visual Patterns.

1 Introdução

Neste artigo temos por objetivo apresentar o conceito de Padrão Fractal e seu potencial no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, com ênfase em aspectos visuais e artísticos. Para tanto, exploramos a relação entre Matemática e Arte, a partir dos tipos de padrões, os fractais e suas propriedades visuais e as características estéticas dos Padrões Fractais.

Baier (2005) destaca a importância dos padrões que emergem dos processos iterativos que geram os fractais. Os fractais são entendidos como uma alternativa para o ensino de Matemática na Educação Básica, baseada na ideia de que estamos inseridos em um mundo cercado por imagens, sons e movimentos que englobam a natureza, a informática, as relações humanas e suas organizações. Esta autora alerta que "[…] o estudo de padrões não é valorizado nos currículos escolares […]" (2005, p. 84) e discorre sobre "[…] a importância de valorizar, nos conteúdos escolares, os aspectos qualitativos da Matemática, relacionados com padrões visuais e ligados com a Arte." (BAIER, 2005, p.137). Nesse sentido, entendemos que a exploração de conteúdos matemáticos existentes nos Padrões Fractais permite que os alunos relacionem expressões artísticas com a Matemática escolar.

Na busca de apresentar essas ideias que nos levam a afirmar que os Padrões Fractais estreitam a relação entre Matemática e Arte, estruturamos este artigo com uma primeira seção dedicada a essa relação. A segunda seção aborda o tema padrões. A terceira trata dos fractais e suas propriedades estéticas e visuais. A quarta seção apresenta o termo Padrões Fractais e sua relação com a Arte. Por fim, tecemos considerações sobre a relação entre os Padrões Fractais, a Matemática e a Arte.

2 Matemática e Arte

Acreditamos que o potencial educativo da Arte está relacionado com várias disciplinas, pois envolve diferentes possibilidades de contribuição para a formação humana. Em especial, a Matemática está relacionada às expressões artísticas tanto na escola quanto em outros ambientes frequentados pelos alunos.

Côrrea (2007) afirma que vivemos num mundo em constante transformação, mas, apesar disso, nossa sociedade tem sido imediatista e os currículos escolares têm privilegiado várias disciplinas e deixado para segundo plano as artes. Segundo a autora:

> Aparentemente, para alguns alunos e professores, pode parecer que essa disciplina não contribui em nada, para suas vidas ou que serve apenas para momentos de lazer e descontração. Muitos ainda não perceberam que a prática artística na educação, além do prazer estético, estimula a imaginação, a criatividade, a capacidade de sentir, observar e refletir aspectos considerados essenciais para situações complexas que exigem soluções rápidas e criativas em qualquer profissão (CÔRREA, 2007, p. 111-112).

Assim como as artes contribuem para o desenvolvimento de diversas capacidades relacionadas à estética e à criatividade, o trabalho concomitante da Matemática e da Arte permite o aprimoramento do raciocínio lógico. Por isso, concordamos que:

> Diante de um mundo rico em informações, imagens e manifestações culturais, a educação não pode restringir-se somente a ensinar a ler, escrever e calcular. Nesse contexto, deve também desenvolver, nas crianças e jovens, o senso crítico, a sensibilidade, a imaginação, a percepção, a criatividade e o valor humano (CÔRREA, 2007, p. 112).

Mas de que Arte estamos falando? A Arte pode ser entendida e manifestada de várias maneiras. Se percebermos a Arte “[...] como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade [...]” (BARBOSA, 2002, p. 19), veremos o quanto ela está relacionada com a Matemática. Afirmamos isso, pois ambas estão atreladas às atividades humanas com manifestações oriundas da inteligência, dos anseios, das ideias e das necessidades de expressão. Essas formas de expressão nos remetem ao dinamismo, rigor, criatividade, estética, harmonia, simetria e a muitos outros conceitos relacionados simultaneamente à Arte e à Matemática. Segundo Santos (2006):

> A Arte propicia o desenvolvimento do pensamento artístico, que caracteriza um modo próprio de dar sentido e ordenar as experiências, o que favorece a sua articulação com as outras disciplinas do currículo, auxiliando, por exemplo, o desenvolvimento de estratégias para resolver um problema. A Arte, em suas especificidades, está diretamente relacionada com todas as formas de criação humana e respectivas expressões, como ocorre, por exemplo, na literatura e nas ciências em geral, inclusive nas ciências exatas e, portanto, na Matemática, já que, ao exercitar continuamente a imaginação do aprendiz, ela abre possibilidades para que ele veja caminhos para resolver uma situação que pode envolver o raciocínio matemático (SANTOS, 2006, p. 61).

A Matemática e a Arte possuem o potencial de revelar estruturas e padrões que nos auxiliam a compreender o mundo e a desenvolver a imaginação de forma estruturada. Devido à relação com a visualização, o campo da Matemática que está mais relacionada com a Arte é a Geometria. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.
>
> Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de Arte, pinturas, desenhos, esculturas e Artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

Neste trabalho de conexão entre a Arte e Matemática, os PCNs recomendam a valorização da geometria em criações humanas por meio de atividades em que se possam explorar as "[...] formas em obras de Arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc." (BRASIL, 1997, p. 83). Seguindo essas recomendações, no trabalho com a Arte e a Matemática, podemos sugerir atividades envolvendo pavimentações, dobraduras, razão áurea, mosaicos, poliminós, entre outros.

Especificamente neste artigo, apresentaremos os Padrões Fractais como um dos elos possíveis entre a Matemática e a Arte. Com este intuito, relacionamos as principais propriedades dos Padrões Fractais, que envolvem aspectos visuais com grande apelo estético. Apresentamos, também, parte dos dados de uma pesquisa de mestrado que indica o interesse pela parte estética e a sensação de surpresa dos alunos, sujeitos dessa pesquisa, durante a exploração dos Padrões Fractais no *software* GeoGebra[1] (FARIA, 2012). Nesse trabalho com os Padrões Fractais, o *software* GeoGebra estimulou que conjecturas fossem testadas para que ideias pudessem ser comprovadas ou refutadas, pois atuou no processo iterativo de construção, manipulação e análise desses padrões.

Durante uma entrevista realizada na coleta de dados, a aluna Viviane[2] destacou o potencial do GeoGebra. Para ela, este

> [...] é um software interessante. Na parte de construir e depois ter como você voltar e ver todos os passos da construção. E o tamanho, as medidas são mais certas com o programa. Talvez, se fosse feito à mão, não iriam ficar tão perfeitas quanto. Até mesmo uma pessoa que não tem habilidade de desenho, usando o GeoGebra, acaba conseguindo fazer bem feito, diferentemente se ela estivesse fazendo à mão.

As entrevistas e os demais dados dessa pesquisa foram coletados ao longo de um curso realizado com 17 alunos do primeiro ano do Ensino Médio, em um laboratório de informática do Instituto Federal Fluminense[3], ao longo do qual foram aplicadas seis atividades, de forma a explorar cada um dos Padrões Fractais abordados.

3 Padrões

Segundo Vale et al. (2005), o termo "padrão" nos remete aos padrões visuais, dos tipos que encontramos em tecidos, papéis de parede e peças de arte. Contudo, alertam que o entendimento de padrão não se restringe a esses exemplos, podendo assumir diferentes conceitos, de acordo com a finalidade almejada. Dessa forma, "padrão" é por eles usado para referir-se à disposição ou aos arranjos de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades. Barbosa (2000) destaca que toda a Matemática está relacionada aos padrões:

> [...] propriedades, regras e algoritmos, podem ser consideradas como padrões; aliás, a Matemática, talvez exagerando um pouco, pode ser pensada como um conjunto de padrões: numéricos, geométricos, algébricos, etc. (BARBOSA, 2000, p. 9).

Podemos pensar em exemplos para ilustrar essa afirmação de Barbosa (2000). A frequência com que ocorrem as copas do mundo de futebol, a cada quatro anos, segue um padrão numérico, determinado por uma progressão aritmética de razão 4. Ao vermos uma sequência, que segue um padrão algébrico, composta por expressões numéricas como: $(x+1)$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$, logo percebemos que o centésimo termo será $(x+1)^{100}$. Um exemplo de padrão geométrico pode ser dado pela Espiral Logarítmica construída no Retângulo Áureo (Figura 1). No processo de construção dessa figura, primeiramente é feito um Retângulo Áureo, em seguida, sobre seu maior lado é feito um quadrado de modo que esse lado pertença ao Retângulo Áureo e ao quadrado, concomitantemente. Esse quadrado passa a integrar a figura, formando um Retângulo Áureo maior. O processo continua para construção dos próximos retângulos. Para construir a Espiral Logarítimica, o padrão geométrico consiste em traçar os arcos circulares de cada quadrado que compõe os Retângulos Áureos. Isso pode ser verificado dividindo a medida do maior lado de cada retângulo pela medida de seu menor lado. Ao efetuarmos essa divisão obtemos o Número de Ouro (ϕ = 1,618).

Vale e Pimentel (2005) propõem algumas tarefas de reconhecimento de padrões e generalização em diferentes representações, como pictórica

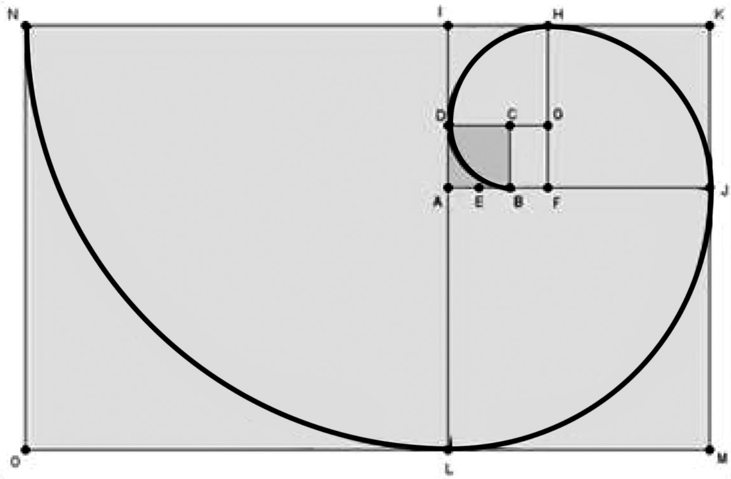

Figura 1: Espiral Logarítmica no Retângulo Áureo
Fonte: FARIA; RIBEIRO, (2009, p. 55).

ou geométrica, numérica e mista. Além disso, recomendam que o trabalho com os diversos tipos e padrões seja simultâneo, pois:

> Os alunos que trabalham na forma exclusivamente numérica manifestaram insuficiências na resolução, não conseguindo obter uma generalização completa ou obtendo uma lei de formação errada. De modo geral os alunos que têm mais sucesso nas tarefas são os que recorrem a uma abordagem exclusivamente geométrica ou mista. Neste sentido devemos incentivar os nossos alunos a olhar para os problemas propostos de vários modos, e a mobilizar todos os seus conhecimentos sejam eles de natureza numérica ou geométrica. (VALE; PIMENTEL, 2005, p. 19).

Nesse sentido, entendemos que Vale e Pimentel (2005) recomendam o trabalho concomitante das propriedades numéricas e geométricas dos padrões. Uma alternativa para essa múltipla abordagem de padrões está nos Padrões Fractais, pois eles proporcionam a exploração não somente das características numéricas e geométricas, mas também de propriedades algébricas. Nesse sentido, entendemos que os Padrões Fractais são tipos específicos de padrões, que serão apresentados em uma próxima seção.

4 Fractais

Nos trabalhos que envolvem fractais percebemos que, quando se trata de uma formalização desse conceito, ainda existem diversas ideias distintas. Mandelbrot, que foi o precursor e também quem nomeou[4] a geometria fractal, afirmou que esta geometria "É o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau e em todas as escalas" (MANDELBROT, 1991, p. 207).

Gouvea e Murari (2004) explicitam que consideram fractais as:

> [...] formas que se caracterizam por repetir um determinado padrão (autossimilaridade). Em conseqüência da autossimilaridade, quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um Fractal se mostram similares à forma como um todo.
>
> Os Fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita (GOUVEA, MURARI, 2004, p.5).

A autossimilaridade é uma propriedade relacionada ao aspecto visual do fractal, assim como a propriedade da complexidade infinita, que também pode ser observada por meio da visualização da iteração dos níveis do fractal.

A complexidade infinita, portanto, está associada às infinitas iterações que ocorrem na construção de um fractal, pois ele é regido por um padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes e que ocorre algébrica e geometricamente. Eberson (2004) destaca que esta propriedade é

> […] responsável pelo grande fascínio que estas figuras provocam pois, na maioria dos casos, os fractais são construídos a partir de "elementos" extremamente simples mas que, apesar disso, dão origem a figuras com extraordinária complexidade e riqueza de detalhes justamente graças às infinitas iterações presentes em sua construção (EBERSON, 2004, p. 18-19).

As propriedades autossimilaridade e complexidade infinita são identificadas nos Padrões Fractais por meio da observação. Para exemplificar essas duas propriedades vamos analisar o Triângulo de Sierpinski (Figura 2).

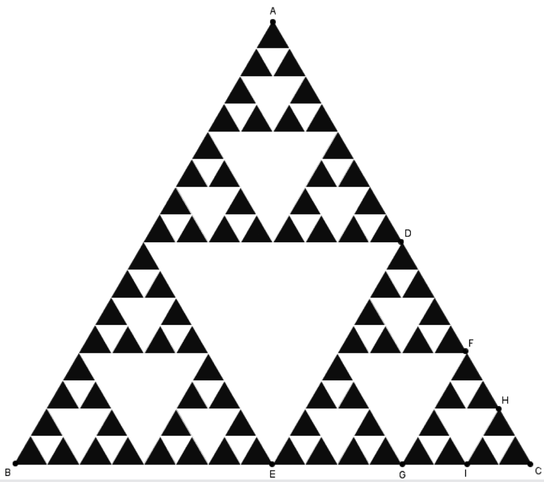

Figura 2: Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski
Fonte: Os autores.

Neste fractal a autossimilaridade pode ser notada ao longo dos níveis, intuitivamente. Para isso, é preciso observar o quanto os triângulos ABC, DEC, FGC e HIC, por exemplo, possuem semelhanças entre si ao longo do processo de retirada dos triângulos. Além do aspecto visual, essa propriedade está presente no fractal, pois ele é construído a partir de um triângulo equilátero qualquer, no qual se determinam os pontos médios dos lados desse triângulo e se retira um triângulo central, com vértices nos pontos médios marcados, restando, então, os demais três triângulos, que são semelhantes ao anterior, pois também são equiláteros.

Se analisarmos que esse fractal é construído obedecendo a esse padrão, veremos que o processo de iteração pode ser realizado infinitas vezes, pois a cada triângulo retirado obtêm-se mais três triângulos. Deste modo, a complexidade infinita do Triângulo de Sierpinski está relacionada às infinitas retiradas e gerações de triângulos que ocorrem devido ao processo de iteração ao qual ele é submetido.

As propriedades apresentadas nessa seção estão presentes não apenas no Triângulo de Sierpinski, mas em todos os Padrões Fractais. Apresentamos alguns deles na próxima seção, além de expormos dados de uma pesquisa de mestrado que indicam as relações existentes entre Matemática e Arte (FARIA, 2012).

5 Padrões Fractais

Entendemos que os Padrões Fractais estão relacionados ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente. Neste modelo é repetida, periodicamente, uma determinada estrutura invariante, para a feitura dos próximos níveis em uma ou mais direções. Entendemos que "[...] ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade, sequência, motivo, regra e ordem." (VALE et al., 2005, p. 3).

Todos os Padrões Fractais possuem as propriedades autossimilaridade e complexidade infinitas, que são visuais. Essas propriedades proporcionam a sensação de surpresa e a contemplação da estética nas regularidades presentes na aparente irregularidade desses padrões. Esse efeito, causado na observação, está relacionado ao fato de cada propriedade ser composta de características como harmonia e simetria, oriundas da atividade humana para construção desses objetos, com rigor e criatividade.

A construção, manipulação e análise de Padrões Fractais no *software* de geometria dinâmica (SGD) GeoGebra, permitiu uma investigação dinâmica e uma interação com os objetos construídos no GeoGebra. Segundo Maltempi (2009), os SGD podem facilitar a aprendizagem e a generalização do conhecimento que está sendo estudado, favorecendo a descoberta de um método para reproduzir e expressar um conceito matemático. Nesse sentido, os SGD podem ir além da comparação de figuras geométricas, pois permitem criar, mover, distorcer, analisar e testar propriedades de figuras em um processo de investigação.

Barbosa (2002, p.19) afirma que um dos motivos do trabalho de fractais, na sala de aula, está relacionado à "Existência do belo nos fractais e possibilidade de desenvolver o senso estético com o estudo e Arte aplicada à construção de fractais."

Desse modo, quando observamos um Padrão Fractal podemos prever o que ocorrerá ao longo das iterações[5]. Assim, a cada iteração o padrão chega a um nível sucessor que será a base para a iteração seguinte.

No Padrão Fractal Lunda-design, por exemplo, podemos observar oito quadrados iguais, dispostos como no nível 0, da Figura 3. O processo de iteração consiste em reproduzir a figura inicial no interior de cada um dos quadrados do nível anterior. Nesse processo de iteração, novos níveis vão sendo formados.

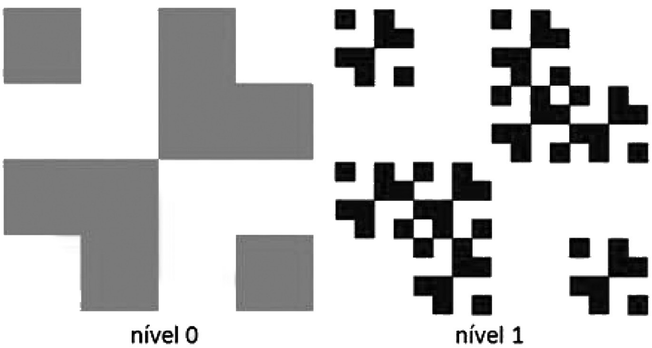

Figura 3: Padrão Fractal Lunda-design representado em dois níveis
Fonte: Os autores.

As observações das características geométricas presentes nos Padrões Fractais nos levam a concordar que:

> O despertar e desenvolver do senso estético pode muito bem ser cuidado e aproveitado com o tema fractais, quer apresentando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades (BARBOSA, 2002, p. 14).

DOSSIÊ TEMÁTICO

É nesse sentido que discutimos neste artigo a possibilidade de exploração de Padrões Fractais como um meio de trabalho concomitante entre Matemática e Arte.

Entre os vários Padrões Fractais existentes, apresentaremos os seguintes: Árvore Pitagórica, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch, Tetra Círculo, Lunda-Design e Hexagonal tipo Dürer. Todas essas construções foram realizadas no *software* GeoGebra.

Para obtenção do Padrão Fractal Árvore Pitagórica (Figura 4), constrói-se um triângulo retângulo. Na sequência, utilizando a hipotenusa desse triângulo, é feito um quadrado com um dos lados sendo a própria hipotenusa. O mesmo processo de construção de quadrado é realizado valendo-se dos catetos. A partir do nível 0, sobre cada um dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo do nível anterior, são desenhados triângulos retângulos com o seguinte procedimento: sobre o lado desses quadrados que é oposto ao lado que também é cateto do triângulo do nível anterior, construímos um novo triângulo retângulo tendo esse lado como hipotenusa. Vale ressaltar que todos os triângulos são construídos com ângulos tendo a mesma medida do triângulo retângulo do nível 0. Para concluir o nível, sobre os catetos dos novos triângulos, são feitos quadrados com um dos lados sendo os próprios catetos.

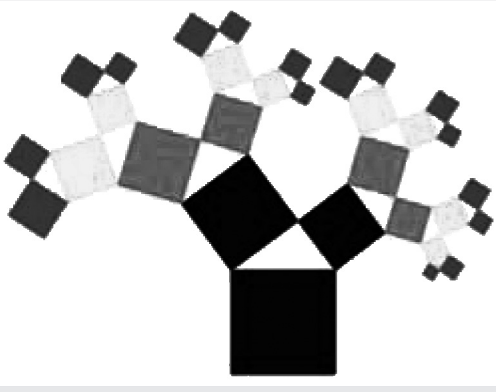

Figura 4: quarto nível do Fractal Árvore Pitagórica
Fonte: Os autores.

Neste Padrão Fractal, o nível inicial (nível 0), consiste na figura representativa do Teorema de Pitágoras, formada por um triângulo retângulo e os três quadrados desenhados sobre os lados. Assim, no nível 1, temos mais duas figuras que representam o Teorema de Pitágoras e, com o passar dos níveis, o número de novas figuras que representam esse Teorema vai dobrando. Nesse Padrão Fractal, os conteúdos matemáticos área de quadrados, progressões aritméticas, uso de tabelas e o teorema de Pitágoras foram trabalhados em uma atividade com os alunos que participaram da pesquisa.

Um segundo Padrão Fractal construído foi o Triângulo de Sierpinski (Figura 2). Seu processo de iteração consiste em, primeiramente, construir um triângulo equilátero e marcar os pontos médios de cada um dos lados do triângulo; em seguida, os pontos médios são unidos por três segmentos de reta, que dividem o triângulo original em quatro novos triângulos menores e congruentes. Deste ponto em diante, o triângulo central é retirado e o mesmo procedimento é realizado nos triângulos menores para iteração dos níveis seguintes. Neste Padrão Fractal, por meio da manipulação e análise dos níveis, os conteúdos matemáticos perímetro, comparações de segmentos, frações e o uso de tabelas foram explorados.

No Padrão Fractal Triângulo de Sierpinski, a sensação de surpresa que falamos ao longo deste artigo é evidenciada na fala do aluno Higor. "Cara, isso pode ser infinito! Isso pode ser infinito… aí cria um aqui, outro aqui, outro aqui, outro aqui, outro aqui (Higor diz isso enquanto mostra à Patrícia os passos da construção). Muito louco isso aqui!"

Nesse momento, é possível ouvir os risos de Patrícia na gravação, e eles continuam revendo os passos da construção. O destaque dado por Higor sobre o processo de construção do Padrão Fractal ser infinito indica que, mesmo informalmente, ele compreendeu a propriedade complexidade infinita neste Padrão Fractal, propriedade esta que está relacionada às infinitas iterações que ocorrem na construção desse fractal.

O Padrão Fractal Curva de Koch (Figura 5) também foi construído. Ele é iniciado com um segmento de reta. Seu processo recursivo consiste em dividir este segmento em três partes congruentes e, em seguida, retirar o segmento central e substituí-lo por dois outros segmentos que formariam um triângulo equilátero com o segmento que foi retirado. Desta maneira, obtêm-se quatro segmentos congruentes. A partir daí, em cada segmento é

Figura 5: quarto nível do Fractal Curva de Koch
Fonte: Os autores.

realizado o mesmo processo para conseguir o nível seguinte. Nesse Padrão Fractal, os conteúdos matemáticos explorados foram potências, uso de tabelas e progressões geométricas.

No Padrão Fractal Tetra Círculo (Figura 6) a construção é iniciada com uma circunferência. Nela são marcados quatro pontos equidistantes (de modo que estes arcos dividam a circunferência em quatro arcos congruentes), os quais são centros de quatro novas circunferências, cujos raios são iguais a metade do raio da circunferência anterior. Para a feitura dos níveis seguintes, em cada nova circunferência, são feitas mais quatro, seguindo o mesmo processo. Com esse Padrão Fractal, os conteúdos matemáticos potências, uso de tabelas, frações e comparação de raios de circunferências, foram explorados.

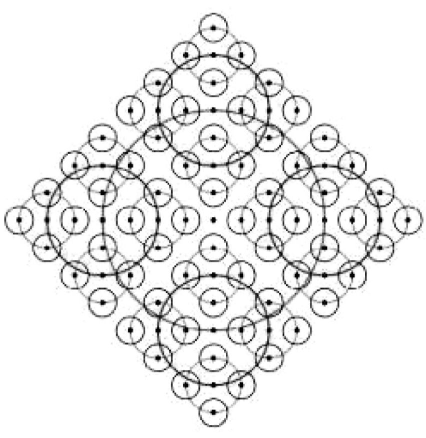

Figura 6: terceiro nível do Fractal Tetra Círculo
Fonte: Os autores.

Durante uma conversa a respeito do Padrão Fractal Tetra Círculo com os alunos do curso, foi destacado que o processo de construção dos níveis do fractal era infinito, pois embora houvessem apenas quatro níveis representados, neste quarto nível, em cada circunferência gerada, quatro novas poderiam ser formadas e este mesmo processo poderia ser realizado indefinidamente, embora restrito a uma área finita. Neste sentido, foi falado da limitação nestes casos para uma representação no papel, pois como as circunferências possuem raios que vão sendo reduzidos à metade, em um nível bem próximo já não conseguiríamos fazer a representação dessas circunferências, devido ao pequeno tamanho que teriam. Foi destacado ainda a possibilidade que o SGD GeoGebra traria neste caso, pois por meio da ferramenta *zoom*, que permite que ampliações e reduções sejam realizadas, poderíamos ampliar uma pequena circunferência, e nela construir quatro novas, seguindo o processo de construção do Padrão Fractal. Enquanto falávamos sobre essa ferramenta, uma dupla de alunos foi aproximando (*zoom*) a tela nas circunferências menores, fazendo o teste das propriedades que havíamos apresentado. A Figura 7 mostra a construção realizada pela dupla, registrada pelo *software* CamStudio[6].

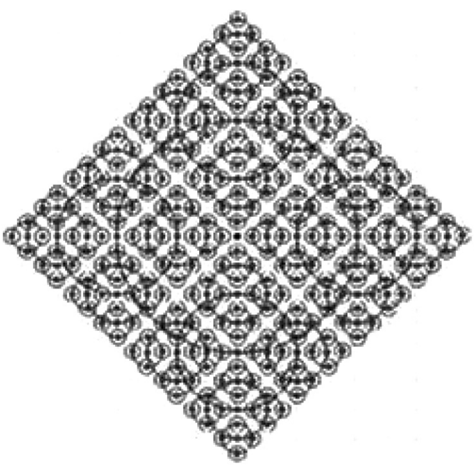

Figura 7: Padrão Fractal Tetra Círculo construído pela dupla Maísa e Viviane

Fonte: Os autores.

Na entrevista realizada com a aluna Viviane, no final do curso, ela falou sobre a construção dos Padrões Fractais no GeoGebra. Na opinião da aluna:

> Construir é muito interessante. À medida que a gente vai construindo, a gente vai conseguindo ver o quanto isso pode ser usado, principalmente pelas pessoas que entendem bem para trabalhar nessa área, porque eu acho bonito os desenhos e tudo. Até para um professor tentar inventar novas aulas, melhorar, tentar fazer as aulas ficarem mais produtivas.

A fala de Viviane evidencia que, para ela, o trabalho com construção de Padrões Fractais também pode ser usado como uma alternativa para que as aulas de Matemática fiquem mais interessantes.

No Padrão Fractal Lunda-design, inicialmente construímos oito quadrados iguais, dispostos como no nível 0, da Figura 3. O processo de iteração consiste em reproduzir a figura inicial no interior de cada um dos quadrados do nível anterior. O Padrão Fractal Lunda-design foi manipulado e analisado e os conteúdos matemáticos sequências e criação de expressões gerais, foram trabalhados.

Na construção do Padrão Fractal Hexagonal tipo Dürer (Figura 8), primeiramente constrói-se um hexágono regular (nível 0). Em seguida, para a feitura dos próximos níveis, inserimos em cada hexágono gerado no

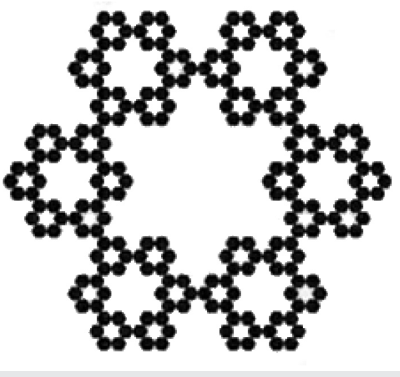

Figura 8: quarto nível do Fractal Hexagonal Tipo Dürer
Fonte: Os autores.

nível anterior, seis hexágonos regulares menores, com lados iguais a 1/3 do hexágono do nível anterior, de modo que cada novo hexágono tenha um de seus ângulos coincidentes com os ângulos do hexágono regular do nível anterior e esses hexágonos menores tenham um vértice em comum. Além disso, os hexágonos do nível anterior são retirados e a figura de cada nível é composta somente pelos novos.

Neste Padrão Fractal foram abordados os conteúdos matemáticos frações, potências, uso de tabelas e progressões geométricas. Este Padrão Fractal foi construído pelas alunas Gisele e Mariana no *software* GeoGebra (Figura 9).

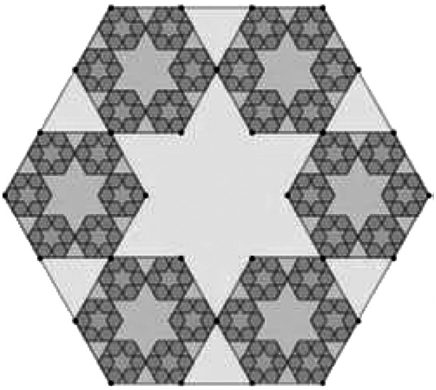

Figura 9: construção do Padrão Fractal Hexagonal, tipo Dürer, realizado pelas alunas Gisele e Mariana

Fonte: Os autores.

Sobre este Padrão Fractal, Mariana disse à turma que observou que "A cada hexágono, se acrescenta eternamente mais seis". A palavra em destaque na fala de Mariana revela sua compreensão, ainda que informalmente, da propriedade complexidade infinita de um Padrão Fractal, pois esta propriedade está relacionada às iterações que ocorrem infinitamente na construção de um fractal. Essa característica identificada está ligada à exploração visual dos Padrões Fractais realizada pelas alunas no *software* GeoGebra.

Os Padrões Fractais aqui apresentados foram trabalhados em atividades realizadas em um curso com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Essas atividades foram pensadas para que os alunos se dedicassem à manipulação e análise destes padrões, buscando identificar aspectos comuns, visando a alcançar a generalização de conteúdos matemáticos. Vários conteúdos matemáticos que foram abordados, como área de quadrados, comparação entre raios de circunferências e entre segmentos, criação de expressões gerais, frações, uso de tabelas, perímetros, potências, progressões aritméticas e geométricas, sequências e o teorema de Pitágoras, poderiam ser explorados em outros Padrões Fractais. Além disso, outros conteúdos matemáticos, como noção de limite, área de outras figuras geométricas e logaritmos podem ser explorados nos Padrões Fractais aqui apresentados e em outros Padrões Fractais que não foram explorados nesta pesquisa. Além disso, outros tipos de padrões podem ser estudados por meio do GeoGebra, e também, os Padrões Fractais podem ser estudados em outros SGD.

Especificamente na construção de Padrões Fractais, muitas são as possibilidades de criação. Com ousadia e criatividade, é possível formar diversos Padrões Fractais. Na exploração de Padrões Fractais destacamos a importância da visualização e exploração das características que estreitam a relação entre Arte e Matemática.

6 Considerações finais

Neste artigo tivemos por objetivo apresentar o conceito de Padrão Fractal e seu potencial no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, com ênfase em aspectos visuais e artísticos. Buscando alcançar esse objetivo, discutimos sobre o quanto os Padrões Fractais estão relacionados à visualização e às propriedades autossimilaridade e complexidade infinita, às quais acreditamos gerar a sensação de admiração pela beleza dos fractais, sensação essa semelhante a que temos quando observamos uma obra de Arte. É nesse sentido que Barbosa (2002) afirma que:

> [...] algumas áreas da Matemática, como a Geometria, possibilitam o surgimento de prazer e gozo que merecem ser explorados pelos educadores. Assim são as situações de contemplação de aspectos harmoniosos ou de contrastes na Arte, na pintura ou arquitetura, o na própria natureza. A visualização de

> simetrias, por exemplo, é um fator poderoso para sentir o belo (BARBOSA, 2002, p. 13).

Acreditamos que a exploração de Padrões Fractais é uma das possibilidades de contemplação de aspectos visuais que relacionam a Matemática e a Arte. Deste modo, afirmamos que a exploração de Padrões Fractais é um dos elos entre esses dois campos do saber.

O trabalho com os Padrões Fractais aponta para a formação de imagens mentais pelos alunos, obtidas principalmente por meio da exploração visual dos fractais. No trecho a seguir, a aluna Gisele foi questionada sobre o que ficou de fractais após o curso realizado. Essa aluna afirmou:

> <u>Gisele:</u> Eu entendi que é um desenho […] que depois vai se multiplicando dentro dele mesmo ou fora, como a Árvore (Pitagórica), não foi?
> <u>Rejane:</u> Sim. E um (Padrão Fractal) que você lembra que foi (se multiplicando para) dentro?
> <u>Gisele:</u> O Triângulo (de Sierpinski) e o (Tetra) Círculo.

Embora essa fala seja breve, indica que imagens mentais dos Padrões Fractais formaram-se na memória da aluna.

Também questionada sobre o que entendia por Fractais após o curso, a aluna Patrícia evidenciou as relações complexidade infinita e a autossimilaridade. Patrícia afirmou que para ela, fractal "[…] é uma figura que se repete. Pode ser <u>infinitamente</u> e em <u>proporções menores</u>, repetindo um <u>padrão</u>". A aluna Mariana também fez suas afirmações no mesmo sentido: "A gente pega as figuras geométricas e faz uma relação que você pode usar uma <u>pequena parte no todo</u>. […] Você segue um <u>padrão</u> e vai fazendo <u>infinitamente</u>".

Já Mariana destacou que, no processo de análise, as características são melhor identificadas e, assim, é possível perceber várias particularidades. Nas palavras da aluna: "Analisar os padrões… É a gente analisar. Não é só perceber, é saber por questões geométricas. Aí a gente acaba vendo cada fato do fractal".

As palavras em destaque na fala dessas alunas indicam o que ficou mais claro para elas sobre o que são fractais. A palavra "infinitamente" na fala de ambas está relacionada com a propriedade complexidade infinita, que se refere às infinitas iterações presentes nos Padrões Fractais. Também destacamos a fala de Patrícia sobre "proporções menores", e a de Mariana sobre "pequena parte no todo", pois a propriedade de autossimilaridade tem o sentido de conseguirmos identificar a figura inicial (o fractal no nível 0) em cada parte do fractal em um nível mais avançado. Além disso, Mariana fala em "seguir um padrão" e Patrícia encerra dizendo que vai "repetindo um padrão". Nesses trechos fica claro que as alunas conseguiram compreender a ideia de que os fractais são regidos por padrões capazes de repetir sua estrutura algébrica e geometricamente.

Na discussão realizada neste artigo, entendemos por Arte as ações humanas que abrangem a emoção, a habilidade e a criatividade (BARBOSA, 2002). Nesse sentido, entendemos que os Padrões Fractais são um dos elos entre Matemática e Arte, pois ao mesmo tempo em que se trata de figuras construídas geometricamente, também podem ser considerados uma forma de expressão artística.

Notas

1 Mais informações e o *download* do GeoGebra podem estão disponíveis em: www.geogebra.org.

2 Os nomes dos alunos aqui relatados são fictícios.

3 IFF – Campus Campos Centro (Campos dos Goytacazes/RJ).

4 Baseado no adjetivo em latim fractus, que tem por verbo correspondente *frangere* que significa, entre outras coisas, fragmentar (BARBOSA, 2002).

5 O sentido de iterar um padrão está relacionado à repetição que pode ocorrer indefinidamente.

6 Mais informações e o *download* do CamStudio estão disponíveis em: http://CamStudio.org/.

Referências

BAIER, T. *O nexo "Geometria Fractal – Produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico*. Tese (doutorado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BARBOSA, R. M. Aprendendo com padrões mágicos. *Publicações da SBEM*, São Paulo/Araraquara, n. 1, 2000.

______. *Descobrindo a geometria fractal – Para a sala de aula*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRASIL, PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais). *Ensino Fundamental – Bases Legais*, v.1. Brasília, DF: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1997.

CÔRREA, C. C. M. Atitudes e valores no ensino da arte: após a Lei nº 4024/61 até a atual Lei de Diretrizes e Bases na Educação Nacional – Lei nº 9394/96. Eccos - *Revista Científica,* São Paulo, v. 9, n. 1, p. 97-113, jan./jul. 2007.

EBERSON, R. R. *Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

FARIA, R. W. S; RIBEIRO, D. S. O. *Razão áurea: um elemento motivador para o estudo de razões e sequências na Educação Básica.* Monografia (Curso Superior de Licenciatura em Matemática)- Instituto Federal Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2009.

FARIA, R. W. S. *Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

GOUVEA, F. R.; MURARI, C. *Fractais de bases caleidoscópicas.* Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, Recife, 2004.

MALTEMPI, M. V. *Broadening the scope of generalisation of mathematical knowledge with digital Technologies,* 2009 (texto não publicado).

MANDELBROT, B. B. *Objetos Fractais:* forma, acaso e dimensão. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1991.

SANTOS, M. R. *Pavimentação do plano*: um estudo com professores de Matemática e Arte. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. *Os Padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE, Lisboa, 200*5.

Recebido em 10 mar. 2012 / Aprovado em 24 abr. 2012

Para referenciar este texto

FARIA, R. W. S.; MALTEMPI, M. V. Padrões Fractais: conectando Matemática e Arte. *EccoS*, São Paulo, n. 27, p. 33-53. jan./abr. 2012.