Indivisa. Boletin de Estudios e Investigación
ISSN: 1579-3141
bindivisa@lasallecampus.es
La Salle Centro Universitario
España

Ramírez García, Mónica; De Castro Hernández, Carlos
Caminos de aprendizaje para problemas aritméticos de estructura aditiva de sustracción
Indivisa. Boletin de Estudios e Investigación, núm. 16, 2016, pp. 167-191
La Salle Centro Universitario
Madrid, España

Caminos de aprendizaje para problemas aritméticos de estructura aditiva de sustracción

Mónica Ramírez García
Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle,
Universidad Autónoma de Madrid
mramirez@lasallecampus.es

Carlos De Castro Hernández
Universidad Autónoma de Madrid
carlos.decastro@uam.es

Recibido: 25.10.2015
Aceptado: 03.11.2015

Resumen

Estudiamos las estrategias que utilizan 54 alumnos, de primer curso de educación primaria, de un colegio público de Madrid, al resolver problemas de estructura aditiva, de sustracción, de distintas categorías semánticas (cambio creciente, cambio decreciente, combinación y comparación) y la evolución de dichas estrategias a lo largo del curso.

Las estrategias han sido analizadas, descomponiéndolas en capacidades y representándolas en grafos como posibles caminos de aprendizaje para los problemas de estructura aditiva de sustracción. La estrategia más utilizada ha sido la de modelización directa de quitar, empleada de forma flexible, para problemas en los que no suele aparecer, seguida de la estrategia de quitar hasta. En menor medida, han aparecido estrategias de conteo, añadir hasta, correspondencia uno a uno, estrategias inventadas, uso de hechos numéricos y algoritmos.

Se han encontrado modalidades de aplicación de estrategias conocidas al emplear materiales manipulativos como la tabla cien o el rekenrek. Los resultados permiten realizar modificaciones en la trayectoria de aprendizaje para los problemas de estructura aditiva, incluyendo nuevas tareas y materiales en el camino de enseñanza y añadiendo estrategias de transición entre la modelización y el conteo en el camino de aprendizaje.

Palabras clave

Caminos de aprendizaje, educación primaria, problemas aritméticos verbales, sustracción, trayectorias de enseñanza y aprendizaje.

Learning paths for arithmetic problems of additive structure of subtraction

Abstract

We study the strategies used by 54 students, from first grade of primary education, in a public school of Madrid, to solve additive structure word problems, of subtraction, from different semantic categories (change add to, change take from, combination and comparison) and the evolution of these strategies along first grade.

The strategies have been analyzed by decomposing them into capacities and representing them in graphs as possible paths of learning for the problems of additive structure of subtraction. The most commonly used strategy has been direct modeling strategy "separating from", used flexibly with problems in which this strategy does not usually appear, followed by the strategy "separating to". To a lesser extent, we have detected counting strategies, "joining to", one to one correspondences, invented strategies, number facts strategies, and the use of algorithms.

We have found modalities of implementation of known strategies, with the use manipulatives as the hundred chart or arithmetic rack. The results of the study allow us to make modifications in the learning trajectory for additive structure problems, including new tasks and manipulatives in the teaching path and adding strategies of transition from direct modeling and counting strategies in the learning path.

Key words

Learning paths, primary education, arithmetic word problems, subtraction, learning and teaching trajectories.

Introducción

El National Council of Teachers of Mathematics publicaba en el año 2000 sus Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003). Dentro de los principios que deben guiar la enseñanza de las matemáticas, el principio curricular indica que un currículo debe centrarse en ideas matemáticas importantes y estar bien articulado entre niveles. Por otra parte, el principio de enseñanza propone que los profesores deben conocer estas grandes ideas matemáticas y cómo las aprenden los niños, para presentarlas de forma coherente (NCTM, 2003). La relevancia de conocer el pensamiento infantil y cómo aprenden los niños cada contenido matemático para planificar las tareas de enseñanza, se enfatiza cada vez más en las investigaciones enfocadas al desarrollo del currículo (Gómez, 2007).

En los principios del NCTM (2003) ya estaba implícita la terna formada por objetivos, tareas y desarrollo del aprendizaje, que ha acabado decantándose en una idea que ha ido aumentando su importancia en la educación matemática: las trayectorias de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, recientemente, distintas entidades como el NCTM, el National Research Council (NRC) y la National Association for the Education of Young Children (NAEYC) señalan la importancia de que el profesor conozca las posibles trayectorias de aprendizaje y enseñanza que aporta la investigación en educación matemática para una mejor instrucción en el aula (NRC, 2001 y 2009; NAEYC y NCTM, 2013). A continuación, vamos a revisar el origen del término trayectorias de aprendizaje y los diferentes significados que ha tomado en la investigación, por su relevancia en los estudios para el desarrollo del currículo.

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Simon (1995), desde una perspectiva pedagógica constructivista social, acuña el término trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA), que consta de tres elementos: un objetivo de aprendizaje, las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes y las tareas que se pueden proponer para promover este aprendizaje. Según este autor, el aprendizaje de los alumnos suele seguir caminos similares y muchos alumnos se pueden beneficiar de una misma tarea o diseño instruccional. Este constituye una opción particular que elige el profesor, a partir de su conocimiento y de sus hipótesis sobre la construcción de conocimiento de sus alumnos, que influirá sobre el desarrollo conceptual de los estudiantes. El resultado de la interacción en el aula al proponer la tarea aportará conocimiento nuevo al profesor sobre sus hipótesis sobre el aprendizaje de sus alumnos de ese contenido particular, sobre las actividades y representaciones a utilizar en la planificación de la instrucción, así como su percepción de la enseñanza y aprendizaje. De este modo, podrá ir creando continuamente una nueva trayectoria hipotética de aprendizaje para ese concepto o modificarla (Simon, 1995).

A partir de la idea fundacional de Simon (1995), los estudios que han empleado THA han mostrado diferentes interpretaciones o aplicaciones (Clements y Sarama, 2004; Gómez, 2007; Gómez y Lupiáñez, 2006). La publicación, en 2004, del monográfico sobre THA de la revista Mathematics Thinking and Learning (vol. 6, n. 2) muestra la diversidad de aplicaciones y significados de este término. Gómez y Lupiáñez (2006) ponen de manifiesto que una diferencia decisiva en el uso de las THA es el nivel de concreción del objetivo de aprendizaje, abarcando desde la planificación de varias sesiones para conseguir un objetivo general, a un objetivo específico concreto de una parte de una clase o una tarea. En los apartados siguientes, vamos a concretar dos concepciones que han surgido en la investigación sobre THA que consideramos complementarias y que hemos empleado en el presente trabajo.

Caminos de aprendizaje de una tarea

Dentro de una línea de investigación orientada al trabajo con profesores de matemáticas de educación secundaria, Gómez (2007), Gómez y Lupiáñez (2006), y González y Gómez (2015) han desarrollado distintas herramientas que se integran en el análisis didáctico, empleado para planificar, implementar y evaluar una unidad didáctica. Este análisis consta de varias fases entre las que se encuentra el análisis de contenido en el que, concretando los significados de referencia del profesor sobre un objetivo de aprendizaje matemático particular, lo caracteriza identificando qué capacidades implican ese objetivo y qué competencias se ven implicadas en su adquisición. Así, el objetivo específico de una tarea se desglosa en las capacidades requeridas para su resolución y se identifican los posibles errores y dificultades de los alumnos.

Las capacidades son acciones o conductas observables que permiten a los alumnos resolver una tarea en un nivel de concreción mínimo (Rico y Lupiáñez, 2010). Gómez y Lupiáñez (2006) consideran las capacidades como los conocimientos, experiencias y habilidades de un individuo necesarias para desarrollar una tarea con un contenido concreto. Así, una capacidad está vinculada a un tipo de tarea y puede involucrar otras capacidades. Cuando el alumno resuelve una tarea matemática, necesita una serie de capacidades que le permitirán terminar la tarea con éxito. También hay que tener en cuenta las dificultades que pueden impedir que un alumno resuelva la tarea propuesta. Los errores son las manifestaciones visibles de estas dificultades. En el análisis cognitivo, el profesor puede prever y hacer hipótesis sobre el proceso de resolución y los errores o dificultades que se puedan encontrar (Gómez, 2007). En estas investigaciones, se define camino de aprendizaje para una tarea como "una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus alumnos activen al resolver la tarea, junto a los errores y dificultades que puedan incurrir" (Gómez, González y Romero, 2014, p. 3). Un grafo de los caminos de aprendizaje para una tarea contiene secuencias de capacidades (por ejemplo, C1-C2-C7-C9), con los posibles errores (E1, E2, E8) que pueden cometer los alumnos, hasta llegar a la resolución de la tarea (González y Gómez, 2015).

Trayectorias de aprendizaje

Desde un punto de vista más amplio, las trayectorias de aprendizaje-enseñanza tienen como objetivo matemático un concepto o estructura conceptual, presente en los documentos curriculares, que puede abarcar un curso escolar e incluso, una o varias etapas educativas. En este sentido, una de las recomendaciones que se plantean, dentro de la comunidad educativa en matemáticas, es que se debería mantener la coherencia entre la investigación en la educación matemática y el desarrollo del currículo matemático (NCTM, 2003; Clements y Sarama, 2004). El currículo debería contemplar las metodologías que ofrecen las investigaciones en el área, estar integrado en todos sus niveles y conectar las tareas con el pensamiento de los niños. Clements y Sarama (2004) afirman que la interconexión de las investigaciones sobre las progresiones de desarrollo del aprendizaje y las investigaciones de secuencias instruccionales pueden resolver estos problemas de coherencia. Estos autores consideran dos factores importantes: primero, un modelo de aprendizaje específico, bien fundamentado teórica y empíricamente, del pensamiento, aprendizaje y desarrollo infantil; segundo, una secuencia instruccional de tareas claves diseñadas para promover ese aprendizaje en un nivel conceptual concreto dentro de una progresión de desarrollo. Así, una trayectoria de aprendizaje incluye tres aspectos: "el objetivo de aprendizaje, las progresiones de desarrollo del pensamiento y aprendizaje, y las secuencias de tareas instruccionales" (Clements y Sarama, 2004, p. 84; Clements y Sarama, 2009, p. 2). Los objetivos matemáticos de aprendizaje se refieren a las ideas matemáticas importantes, es decir, los conceptos y destrezas matemáticas centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños, y generativas de futuros aprendizajes. Las progresiones de desarrollo o caminos de aprendizaje son los niveles de pensamiento, cada uno más sofisticado que el anterior, que conducen o guían a alcanzar los objetivos matemáticos. Estas progresiones de desarrollo describen el camino típico que siguen los niños en la comprensión de un contenido matemático. Los diseños instruccionales son los caminos de enseñanza, que se componen de un conjunto de tareas en cada uno de los niveles de pensamiento de los caminos de aprendizaje, diseñadas con el fin de que los niños aprendan las ideas y destrezas necesarias para lograr ese nivel de pensamiento y que promueven el paso al siguiente nivel (Clements y Sarama, 2009).

Trayectorias de aprendizaje de la adición y la sustracción

El conocimiento de la sustracción no evoluciona de forma aislada. Depende de otras ideas matemáticas como la suma o el valor posicional e implica, no solo estos aspectos conceptuales, sino también la fluidez de cálculo con números de varias cifras. La Figura 1 expone las ideas matemáticas importantes que vertebran el desarrollo del aprendizaje de la sustracción, según el documento de focos curriculares (NCTM, 2006), a lo largo de varios cursos escolares, desde los 5 a los 9 años.

Figura 1. Focos curriculares del bloque número y operaciones desde Kindergarten a Grado 3 (NCTM, 2006)

A partir de las ideas matemáticas importantes, expuestas en la Figura 1, vamos a describir la trayectoria de aprendizaje para los problemas de adición y sustracción con números de una cifra. Nos basamos en diversas investigaciones desarrolladas dentro del enfoque de la Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI) (Ambrose, Baek y Carpenter, 2003; Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997), en las que los niños desarrollan conceptos matemáticos, partiendo de sus propias estrategias informales de modelización directa, basándose en el uso de objetos y sus destrezas de conteo, ante situaciones de resolución de problemas aritméticos verbales. Estos estudios reflejan la progresión del pensamiento infantil a través de diferentes estrategias, cada vez más evolucionadas, que surgen ante la resolución de problemas de estructura aditiva con números de una o varias cifras. En la Figura 2, describimos la trayectoria de aprendizaje y enseñanza, para niños de 5 a 7 años, compuesta por el camino de aprendizaje, que muestra los hitos evolutivos por los que progresa el pensamiento infantil y el camino de enseñanza, formado por los tipos de problemas aritméticos verbales que favorecen el avance del pensamiento infantil a lo largo del camino de aprendizaje.

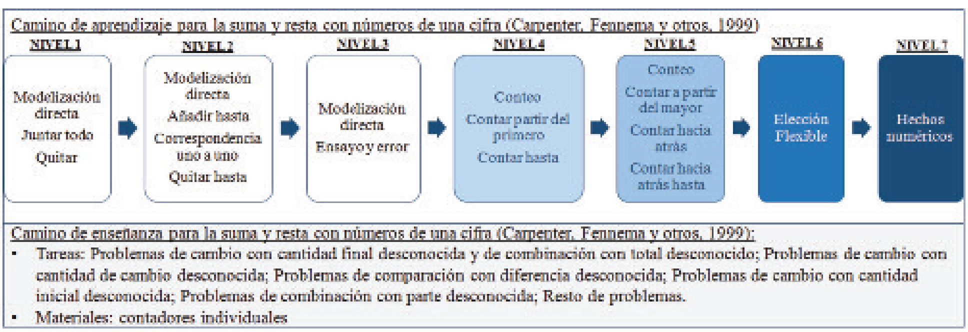

Figura2. Trayectoria de enseñanza-aprendizaje para la suma y resta con números de una cifra

Indivisa, Bol. Estud. Invest. 2016, nº16, pp.167-192
ISSN: 1579-3141

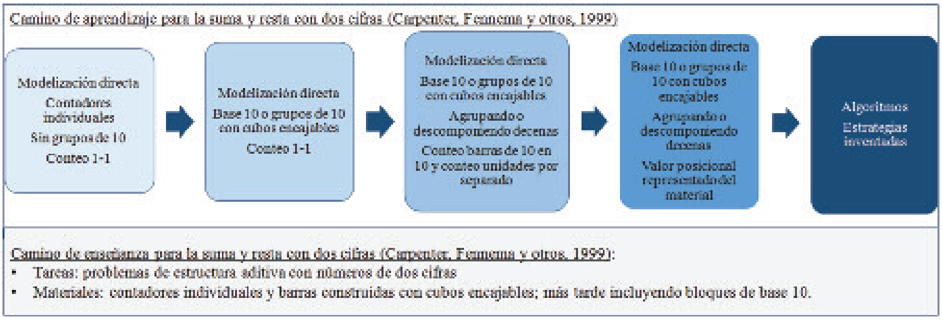

Figura 3. Trayectoria de enseñanza-aprendizaje pra problemas aditivos con números de dos cifras

En el caso de que aparezcan los números de dos cifras, se produce un cambio en las tareas, en los materiales que se suministran como ayuda a los alumnos (como los bloques de base diez de Dienes) y en las estrategias infantiles, que evidencian niveles diferentes de comprensión del valor posicional. En la Figura 3, se identifican nuevas tareas e hitos evolutivos en las trayectorias de aprendizaje y enseñanza de la adición y la sustracción, al aparecer los números de dos cifras, con sus consecuentes dificultades ocasionadas por el sistema de numeración decimal. La consideración conjunta de estas dos trayectorias (Figuras 2 y 3) sirve como referencia teórica para valorar el trabajo que hacen los escolares con contenidos matemáticos pertenecientes a este ámbito.

Objetivos

En este trabajo nos planteamos tres objetivos:

1. Analizar las estrategias utilizadas por los alumnos al resolver diferentes problemas de estructura aditiva, de sustracción, identificando la secuencia de capacidades que componen cada estrategia.
2. Construir los caminos de aprendizaje para cada tarea, representando dichos caminos como sucesiones de capacidades en el grafo de las tareas.
3. Ubicar las estrategias encontradas dentro de las trayectorias de aprendizaje-enseñanza para la adición y la sustracción descritas en el marco teórico de este trabajo.

Método

Participantes

Hemos desarrollado el estudio en dos aulas de primer curso de educación primaria, en el CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real (Madrid). Participan

28 alumnos de 1ºA (16 niños y 12 niñas) y 26 alumnos de 1ºB (14 niños y 12 niñas). Al iniciar el curso, la edad media de los alumnos era de 6 años y 2 meses.

Diseño del taller

Los problemas se han realizado dentro de un taller dirigido por las tutoras de los grupos, que habían recibido un curso de formación sobre el enfoque investigativo de la enseñanza de las matemáticas (Baroody, Cibulskis y Lai, 2004), con elementos de la Instrucción Cognitivamente Guiada (Carpenter, Fennema y otros, 1999). El estudio abarca todo el curso escolar, con un total de 24 sesiones, una por semana, de 45 minutos de duración.

Dentro del contexto general de la investigación, los alumnos han resuelto problemas de los tipos siguientes:

- Problemas de multiplicación y división con grupos de 10, que implican el concepto de decena, en que los alumnos tienen oportunidad de contar distintos órdenes de unidades, como decenas y unidades, y de aprender aspectos importantes del sistema de numeración decimal (Ramírez y De Castro, 2014a).

- Problemas de estructura aditiva, con números de dos cifras, para que los niños construyan estrategias en las que la comprensión del valor posicional de los números facilite su resolución. Además podrán relacionar el algoritmo de la suma y resta, que van a aprender en las clases habituales, con las estrategias desarrolladas en el taller.

- Problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división, para que construyan sus primeros significados sobre estas operaciones (Ramírez y De Castro, 2014b).

En este trabajo nos centramos en las siete sesiones del taller (1, 2, 6, 16, 19, 22, y 23) en las que se han planteado problemas de estructura aditiva de sustracción. Los enunciados de los problemas planteados (ver Tabla 1) están secuenciados de acuerdo al camino de enseñanza descrito en la Figura 2. Se incluyen problemas de cambio decreciente con cantidad final desconocida y con la incógnita en la cantidad de cambio; un problema de cambio creciente con la cantidad de cambio desconocida; un problema de combinación con una parte desconocida; y finalmente, un problema de comparación con la diferencia desconocida. Esto supone que los alumnos resuelven problemas de diferentes categorías semánticas, que corresponden con distintos significados asociados a la sustracción. Además, los problemas basados en situaciones sustractivas no se plantean de forma consecutiva, evitando que los alumnos los resuelvan de forma mecánica.

Tabla 1. Problemas de estructura aditiva de sustracción

Sesión	*Problema*	*Categoría semántica*
1	Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?	Cambio decreciente con final desconocido
2	Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?	Cambio decreciente con cambio desconocido
6	En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?	Cambio decreciente con cambio desconocido
16	La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá?	Cambio decreciente con final desconocido
19	Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?	Cambio creciente con cambio desconocido
22	Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?	Combinación con parte desconocida
23	Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?	Comparación con diferencia desconocida

Las sesiones de trabajo en las que se realizan los problemas siguen las siguientes etapas (Ramírez y De Castro, 2012): (1) Lectura de un cuento, que proporciona un contexto facilitador de la comprensión del enunciado del problema; (2) Lectura de la carta, en la que una persona, familiar para los niños, pide ayuda para resolver el problema, lo que tiene la finalidad de sumergir el problema en una situación más amplia de comunicación; (3) Trabajo individual, en el que los alumnos tratan de resolver el problema utilizando la estrategia y los materiales que consideren oportunos; (4) Puesta en común y consenso sobre el resultado y la estrategia, donde los niños deben explicar cómo han resuelto el problema; y (5) Escritura de la carta de respuesta, en la que debe contestarse con una carta a la recibida al inicio del taller.

Recogida de información

La recogida de datos se ha llevado a cabo por diferentes medios: (a) Hojas de registro, en que se describen los procedimientos infantiles y se anotan los materiales empleados por los alumnos; (b) Entrevistas flexibles en el aula, siguiendo el enfoque de Ginsburg, Jacobs y López (1996), grabadas en vídeo; (c) Grabaciones en video, que recogen instantes del trabajo individual, la puesta en común, o la escritura de la carta final; (d) Fotografías en distintos momentos de la intervención; (e) Las hojas de trabajo de los alumnos; (f) Cartas de los alumnos que incluyen la respuesta al problema; y (g) Narraciones de la investigadora hechas al concluir la sesión.

Resultados

Análisis de estrategias y caminos de aprendizaje

Los procedimientos observados han sido analizados y desglosados en secuencias de capacidades, clasificados por tipos de estrategia (modelización directa, conteo, etc.) y estrategias específicas, empleando el esquema de clasificación característico de los estudios de la Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI) citados en la introducción. A continuación, describimos las estrategias, indicando las capacidades necesarias para su ejecución. Partimos de las capacidades detalladas en documentos como los Common Core State Standars for Mathematics (CBP & CCSSO, 2010), y de estudios como el de Clements (2004).

Las estrategias de modelización directa utilizadas en estos problemas son las estrategias de quitar, quitar hasta, añadir hasta y correspondencia uno a uno. Los niños utilizaron la estrategia de quitar con más frecuencia que las demás. Esta estrategia se utilizó, tanto en problemas de cambio decreciente con final desconocido, como en problemas del mismo tipo con la incógnita en la cantidad de cambio, combinación con parte desconocida y comparación con diferencia desconocida, lo que indica un uso flexible de dicha estrategia. La estrategia de quitar consiste en representar la cantidad mayor del problema y a continuación, quitar, tachar o separar la cantidad de elementos que indica la cantidad menor del problema. Finalmente, se cuentan los elementos que quedan. Los niños aplicaron esta estrategia con diferentes materiales, como cubos encajables u otros objetos, marcas o dibujos hechos en papel, con las cuentas del rekenrek (Blanke, 2008; De Castro, 2015) y con los dedos de las manos, sin aprovechar su configuración (sin subitizar cantidades de dedos, sino utilizando los dedos como simples contadores). En la Figura 4, se pueden ver las capacidades necesarias para llevar a cabo esta estrategia.

En las descripciones de las estrategias, al desglosarlas en capacidades, añadimos entre paréntesis el número que hemos dado a la capacidad, en el contexto general de la investigación a la que pertenece el presente trabajo (con los 24 problemas del taller). La numeración de las capacidades la utilizamos en los grafos de los caminos de aprendizaje de una tarea (Figura 10). En el anexo incluimos un listado de las capacidades utilizadas en este artículo con una breve descripción.

Figura 4. Secuencia de capacidades para la estratgia de quitar

Para aplicar la estrategia de quitar, el alumno debe ser capaz de leer los numerales escritos en el enunciado del problema (C1). Las cantidades del problema están indicadas en decenas y unidades, por lo que el alumno debe distinguir que hay dos unidades de distinto orden (C31). A continuación, los alumnos tendrán que formar una colección de 20 elementos, ya sea con cubos encajables, con marcas u otros objetos (C2). En este caso, la segunda imagen de la secuencia (Figura 4)

Indivisa, Bol. Estud. Invest. 2016, nº16, pp.167-192
ISSN: 1579-3141

muestra dos barras de 10 construidas con cubos encajables. Un aspecto importante sobre la representación de cantidades, en primero de educación primaria, es el agrupamiento de 10. Representar una cantidad de dos cifras agrupando las decenas (C88) se considera una expectativa de aprendizaje a alcanzar en este curso. La capacidad de formar una colección con grupos de 10 se ha observado también utilizando bloques de base 10 (C53) o con cartones de decenas de huevos (C100) (ver Figura 5). Una vez representada la cantidad, se realiza la acción de quitar objetos o tachar marcas o dibujos, contando de uno en uno cada elemento que se descarta (C6). Al quitar una cantidad de una colección representada con bloques de base 10, los alumnos suelen señalar las unidades que quieren quitar, sin poder retirarlas, o bien descomponen una barra (decena) en cubos (unidades) para poder quitar elementos (C79). Finalmente, se cuentan los elementos que quedan, lo que se puede realizar de uno en uno (C10) o de 10 en 10, cuando las cantidades están representadas con grupos de 10, bloques de base 10 o cartones de decenas de huevos (C89 y C54). Para dar la solución, se debe escribir el numeral en cifras (C14) o en palabras (C15).

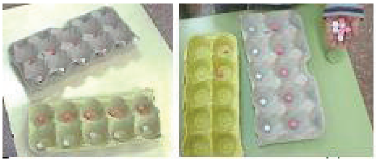

Figura 5. Secuencia de capacidades C100-C6

Los niños utilizaron también la Tabla 100 para aplicar la estrategia de quitar. Para hacerlo, se identifica la cantidad mayor del problema con su numeral en la Tabla 100, considerando todos los numerales anteriores, para así formar la colección (de numerales/objetos) con el material (C5). A continuación, se cuentan, desde la casilla 1, tantas casillas como elementos hay que quitar (C8). Para hallar la solución, contaban las casillas que quedaban hasta el numeral mayor inicialmente señalado (C13). Se ha observado también que los niños quitan los numerales empezando desde el mayor hacia atrás (C9), lo que supone señalar el numeral de la cantidad mayor del problema en la Tabla 100 y contar hacia atrás tantos numerales como elementos haya que quitar. En este caso, para saber la solución del problema, basta identificar el numeral anterior al último quitado (C12). Como otra variante del uso de la Tabla 100, registramos un caso en el que, en vez de utilizar la Tabla 100, el alumno escribe la secuencia numérica desde el 1 hasta el numeral mayor del problema, para representar una cantidad (C4). A continuación, se pueden realizar los mismos pasos que con la Tabla 100.

La estrategia de quitar también se ha aplicado con el rekenrek. La disposición de las cuentas del rekenrek presenta dos grupos de 5 cuentas en cada fila. Este material permite reconocer cantidades de manera inmediata (subitizar, ver De Castro, 2015). En los problemas de resta, se observó el aprovechamiento de esta configuración con la estrategia de quitar. Los niños representaban la cantidad mayor del problema (C3) e identificaban cantidades en las que se puede descomponer dicha cantidad ayudándose de la configuración (C7). La modalidad de uso de la estrategia quitar con el rekenrek, requiere la identificación de cantidades por la configuración de sus cuentas (C11). En la Figura 6, vemos la representación de las 11 damas atrevidas, del problema de la sesión 1, descompuesta en dos colecciones de 6 y 5 elementos (Figura 6, a la derecha). El uso de las manos en los problemas de resta, también permitió identificar descomposiciones de cantidades al representar la cantidad mayor con los dedos de las manos, separándolos en dos grupos con configuraciones reconocibles (por ejemplo, representando el 8 con las manos como 5 y 3).

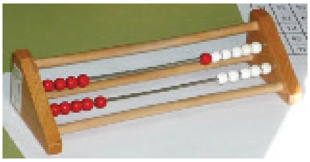

Figura 6. Descomposición del 11 en 5 y 6 en el rekenrek

La estrategia de quitar hasta ha sido siempre utilizada, a excepción de un caso, en las sesiones 2 y 6, con problemas de cambio decreciente con la cantidad de cambio desconocida. Esta estrategia consiste en representar la cantidad mayor del problema e ir quitando o tachando elementos hasta que queda la cantidad menor del problema (C23). Finalmente, se cuentan los elementos que se han quitado o tachado. La Tabla 100 permite contar los numerales que hay entre dos numerales dados. Así, la estrategia de quitar hasta con este material consiste en contar el número de casillas que hay, desde la casilla que representa el dato mayor del problema a la que representa el dato menor (C56).

La estrategia añadir hasta se basa en representar primero la cantidad menor del problema con una colección de objetos, que se completa después hasta obtener la cantidad mayor (C18). En este proceso, los elementos que se van añadiendo deben distinguirse de los inicialmente representados, ya que la solución del problema se consigue contando la cantidad de elementos añadida. Esta estrategia ha sido utilizada con dibujos, con los dedos de las manos, que con su configuración permiten distinguir los añadidos, y con cubos encajables. En la Figura 7, se aprecia la secuencia de capacidades de la estrategia añadir hasta, aplicada con bloques de base 10. Los alumnos reconocen la cantidad mayor del problema, que viene dada en decenas, y representan primero la cantidad menor del problema con bloques de base 10, completando después hasta las barras, la cantidad mayor del problema. Finalmente, se realiza el conteo de la cantidad añadida. La estrategia de añadir hasta con la Tabla 100 consiste en señalar en la Tabla 100 los dos numerales implicados en el problema y contar los numerales que hay desde el más pequeño al mayor (C13).

Indivisa, Bol. Estud. Invest. 2016, nº16, pp.167-192
ISSN: 1579-3141

Figura 7. Secuencia de capacidades para la estrategia de añadir hasta

Para terminar con las estrategias de modelización directa, la estrategia de correspondencia uno a uno consiste en representar las dos cantidades del problema, emparejando cada uno de los elementos de una colección con un elemento de la otra. Si las cantidades son diferentes, habrá elementos que se queden sin pareja y la solución se consigue contando estos últimos (C17). En las aplicaciones que hemos observado de esta estrategia, se han utilizado marcas o dibujos en papel, cubos encajables u otros objetos. En la Figura 8, se puede observar la secuencia de capacidades que componen esta estrategia.

Figura 8. Secuencia de capacidades para la estrategia correspondencia uno a uno

Las estrategias de conteo que se han podido observar son conteo hacia atrás, contar hasta y conteo hacia atrás hasta. Dichas estrategias requieren llevar el rastro de los numerales enunciados. Al principio, los niños necesitan objetos o marcas para llevar el rastro de la secuencia de conteo (conteo con objetos) y más tarde, llevan el rastro mentalmente o con las manos (conteo).

La estrategia de contar hasta consiste en enunciar hacia delante la secuencia de numerales, desde la cantidad menor a la cantidad mayor del problema, llevando el rastro de los numerales enunciados mentalmente o con los dedos de la manos (C26). Una modalidad de esta estrategia de conteo consiste en utilizar una colección de marcas para ayudarse a llevar la cuenta de los numerales enunciados (capacidad 20). En la Figura 9, mostramos la secuencia de capacidades necesarias para aplicar esta modalidad. Los alumnos deben ser capaces de formar una colección con el numeral que indica su cardinal (C19), 78 en este caso. A partir de ahí, enuncian la secuencia de numerales hasta el 90, la cantidad mayor, escribiendo una marca en el papel por cada numeral enunciado. Finalmente, cuentan el número de marcas escritas.

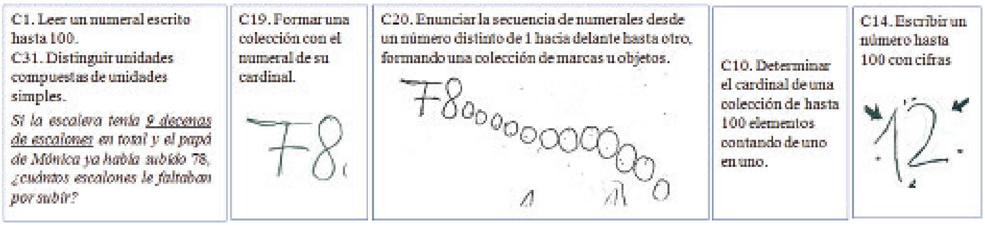

Figura 9. Secuencia de capacidades para la estrategia contar hasta con marcas

La estrategia de contar hacia atrás hasta es similar a contar hasta, pero realizando un conteo regresivo. Consiste en enunciar la secuencia numérica desde la cantidad mayor a la cantidad menor, llevando el rastro de los numerales enunciados mentalmente o con los dedos de la mano (C57). Si para llevar el rastro de los numerales enunciados, se necesita formar una colección de marcas u objetos (C110), se considera una estrategia de conteo con objetos. Tanto en la estrategia de contar hasta como en contar hacia atrás hasta llevando el rastro con las manos, los niños hacen uso de la capacidad de identificar cantidades representadas con las manos por su configuración (C11).

La estrategia de uso de hechos numéricos derivados, en la que se recupera un hecho numérico básico de la suma (C22), tras identificar la relación entre la suma y la resta (C21), es la estrategia que muestra un mayor conocimiento formal sobre las combinaciones básicas de números de una cifra. Los hechos numéricos intervienen también en las estrategias inventadas, empleadas en las sesiones 16, 19 y 23; la mayoría, en la sesión 19. Estas estrategias suponen varias capacidades, todas ellas basadas en el conocimiento del valor posicional y el uso de hechos numéricos básicos: identificar la posición de las decenas y la posición de las unidades en un número de dos cifras (C71), identificar el número de dos cifras compuesto por un número de decenas y un número de unidades (C77), restar decenas y unidades por separado (C111), sumar a un número de dos cifras las unidades necesarias para llegar a la siguiente década (C112), calcular el número de decenas que hay de una década a otra (C113), restar en secuencia primero la decenas y luego las unidades (C114) y descomponer una década en otras dos décadas menores (C116). Al sumar y restar se requiere también recuperar hechos numéricos (C22). La primera estrategia inventada que se utilizó consiste en descomponer en decenas la cantidad mayor del problema (por ejemplo, 40 – 26, 4 decenas), restar las decenas (4 – 2 = 2 decenas), restar las unidades a una de las dos decenas que quedan (10 – 6 = 4) y sumar las unidades restantes a la otra decena (1 decena más las 4 unidades, son 14). Otra forma de hacerlo es completar a la década siguiente (añado 4 a 26 para llegar a 30), y sumar esta cantidad a las decenas que faltan para llegar al número mayor (4 + 10 = 14). Y por último, restar las decenas y unidades por separado (4 – 2 son 2 decenas, que son 20 unidades; 20 menos 6, 14).

Por último, el algoritmo de la resta fue elegido por 6 niños en este tipo de problemas. Su aplicación tuvo poco éxito, al resultar en todos los casos una resta con llevada que los alumnos todavía no habían estudiado. Para los algoritmos, se necesita además colocar las cifras de los dos valores posicionales en su lugar (C81), comenzar el algoritmo por las unidades (C82), realizar el paso de "pedir prestado" en la resta (C108), etc.

El análisis de todas las estrategias ha permitido identificar las capacidades necesarias para aplicar cada una de ellas y construir los caminos de aprendizaje para los problemas de estructura aditiva de sustracción. Los errores que se han observado a lo largo de las sesiones con este tipo de problemas son los siguientes: uso de estrategia inadecuada (E1) al no comprender la tarea; respuesta al azar (E16); errores de conteo al formar colecciones (E2) o al determinar el cardinal de una dada (E3); escritura errónea de números de dos cifras (E7); cambiar la posición de las decenas y unidades al escribir un número de dos cifras (E25); no usar bien la Tabla 100 (E4) por falta de comprensión de la secuencia numérica; contar un numeral de más o de menos en estrategias de conteo (E5); construir colecciones grandes sin saber su cardinal (E26), por no dominar el conteo o por falta de sentido numérico; errores al nombrar numerales de dos cifras (E11) o en la lectura del numeral (E15); considerar las decenas como si fuesen unidades (E27) o como agrupaciones con un número de elementos distinto de 10 (E28); utilizar los algoritmos inadecuadamente (E30) y errores en la llevada (E29). En la Figura 10, mostramos los caminos de aprendizaje correspondientes a las estrategias observadas en todos los problemas. Los caminos de aprendizaje marcados con una línea más gruesa corresponden a las secuencias completas que conforman cada estrategia descrita en los párrafos y figuras anteriores.

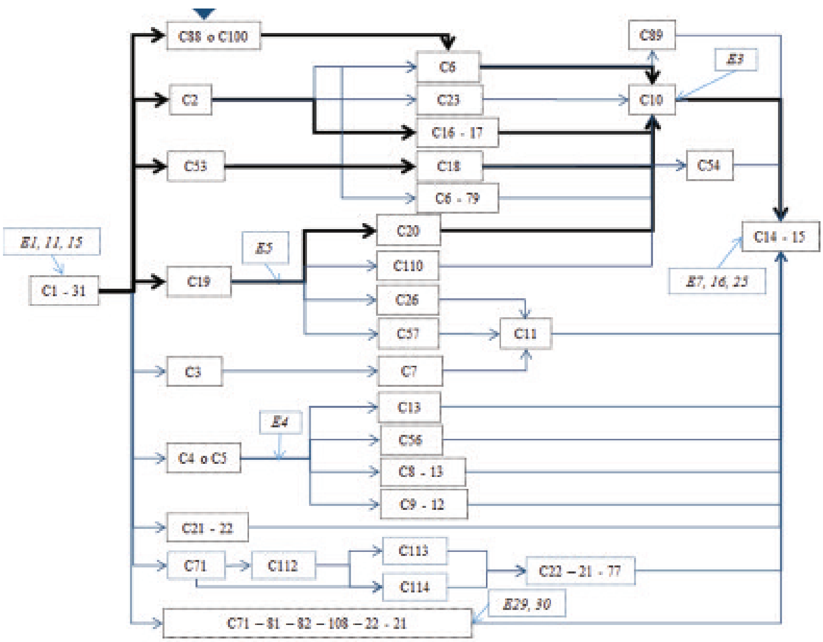

Figura 10. Caminos de apredizaje para problemas de sustración

Evolución de las estrategias y trayectorias de aprendizaje-enseñanza

El estudio de la evolución de las estrategias a lo largo de las sesiones permite valorar los resultados obtenidos y completar las trayectorias de aprendizaje descritas en la introducción. En la Tabla 2, presentamos la frecuencia de uso de cada estrategia a lo largo de las sesiones en que aparecen problemas de sustracción. En la sesión 1, se planteó un problema de cambio decreciente con la cantidad final desconocida, donde los niños utilizaron mayoritariamente la estrategia de quitar. En la sesión 2, en un problema de cambio decreciente con la cantidad de cambio desconocida, aumenta la estrategia de quitar hasta y desciende el uso de quitar. En esta segunda sesión, aparece también la correspondencia uno a uno, que se mantiene en la sesión 6. En la sesión 6, se utiliza más frecuentemente la estrategia de quitar de forma flexible que la estrategia quitar hasta que corresponde con la estructura semántica del problema. En la sesión 16, el problema vuelve a ser de cambio decreciente con cantidad final desconocida y la estrategia más utilizada es quitar. Además, aparecen los primeros casos de uso de estrategias inventadas basadas en el valor posicional de las cifras.

Figura 10. Caminos de apredizaje para problemas de sustración

	Sesiones						
Tipo de estrategia	1	2	6	16	19	22	23
Quitar	53	30	25	27	10	15	8
Quitar hasta		26	19	1			
Añadir hasta	1		2		8	2	5
Correspondencia uno a uno	1	2	2			1	2
Conteo con objetos	1				1		
Conteo		1	1	1	6	1	2
Hecho numérico	1						
Estrategia inventada				3			3
Algoritmo					3	11	3
Total estrategias registradas	57	59	49	32	28	30	23

En la sesión 19 aumenta el uso de estrategias como añadir hasta y contar hasta al ser un problema de cambio creciente con cantidad de cambio desconocida. Aun así, los niños utilizan con más frecuencia la estrategia de quitar de forma flexible. En la sesión 22, aumenta la elección del algoritmo de la resta, a pesar de no tener gran éxito de ejecución al tratarse de una resta con llevada. Los niños que no se conformaban con el resultado obtenido tras realizar el algoritmo, utilizaban la estrategia de modelización directa quitar, para comprobar el resultado o incluso para resolver finalmente el problema. La sesión 23 contenía un problema de comparación con la diferencia desconocida y solo se obtuvieron 23 estrategias adecuadas de los 49 asistentes. Las estrategias observadas en esta sesión son muy variadas, siendo la más frecuente la estrategia de quitar utilizada de forma flexible.

Las estrategias de conteo, que desde la sesión 2 se utilizaron con poca frecuencia, aumentan en la sesión 19, para después volver a descender su uso. En las sesiones 16 y 23, surgen estrategias inventadas. La utilización del algoritmo de la resta va aumentando progresivamente en las sesiones 19 y 22, y en la sesión 23, que plantea un problema de comparación con diferencia desconocida, desciende de nuevo.

Tras el análisis de la evolución de las estrategias y el desglose en caminos de aprendizaje, estamos en condiciones de incluir algunos aspectos observados en las trayectorias de aprendizaje-enseñanza deducidas del marco teórico de la CGI (Figura 2). Comenzamos comparando los resultados del análisis de estrategias de este trabajo con la trayectoria para el aprendizaje-enseñanza de las combinaciones básicas. Los niños primero son capaces de desarrollar la estrategia de quitar (Nivel 1). Para ello se necesita representar colecciones de objetos o marcas, realizar acciones de quitar o tachar y determinar el cardinal de una colección mediante conteo. Las siguientes estrategias que los niños son capaces de usar generalmente son añadir hasta, quitar hasta y correspondencia uno a uno (Nivel 2). Para las estrategias de añadir hasta y correspondencia uno a uno hay que tener la capacidad de representar varias cantidades distinguiéndolas por color, forma o posición. Para la correspondencia uno a uno se necesita disponer dos colecciones emparejadas y para añadir hasta se debe saber completar una colección hasta completa una cantidad, distinguiendo los elementos añadidos. Para la estrategia quitar hasta se necesita quitar elementos de una colección hasta que queda una cantidad controlada por conteo. En el taller no se han planteado problemas de cambio con la cantidad inicial desconocida y puede ser la causa de no haber registrado ninguna estrategia de ensayo y error (Nivel 3).

El uso de la Tabla 100 ha permitido observar estrategias de transición entre las estrategias de modelización directa y las estrategias de conteo, ya que en este material se utilizan los numerales para representar cantidades. Primero se forma una colección señalando el numeral en la Tabla 100 que corresponde con el cardinal de la misma. Para determinar el resultado, se puede contar de uno en uno todos los numerales hasta la casilla resultado o simplemente determinar el resultado por el último numeral señalado. Para la modalidad de quitar, tras representar una cantidad con todas las casillas hasta el numeral que indica el cardinal, se pueden quitar los primero numerales o los últimos. Para la modalidad de quitar hasta, se cuenta el número de casillas que hay entre dos numerales empezando desde el mayor hacia atrás hasta el menor.

Antes de pasar a las estrategias de conteo sin material, tal como indica Fuson (1992) se han observado estrategias en las que se utilizan objetos o marcas para llevar el rastro de los numerales que hay que contar o se han contado. La estrategia contar hasta con objetos consiste en enunciar hacia delante desde un numeral hasta otro, formando una colección de marcas u objetos equipotente a los numerales enunciados. La estrategia contar hacia atrás hasta con objetos consiste en enunciar la secuencia hacia atrás desde un número hasta otro, formando una colección de marcas u objetos equipotente a los numerales enunciados. Tanto el conteo con objetos como las estrategias con Tabla 100 las consideramos estrategias de transición entre la modelización directa y el conteo (transición entre nivel 3 y nivel 4).

Las estrategias de conteo requieren formar una colección con el numeral de su cardinal. En la estrategia contar hasta se enuncia la secuencia de un numeral hasta otro hacia delante llevando el rastro de los numerales enunciados con los dedos o mentalmente (Nivel 4). La estrategia de conteo hacia atrás hasta se forma una colección con tantos elementos como numerales se enuncian desde una cantidad a otra hacia atrás (Nivel 5). El siguiente nivel recoge la elección flexible de estrategias, lo que implica un dominio de la relación parte-todo de la estructura aditiva (Nivel 6). Por último, la recuperación de hechos numéricos básicos y derivados supone la memorización de las combinaciones básicas de la suma (Nivel 7).

Tras describir la trayectoria para números de una cifra, centramos el foco de atención a la trayectoria de aprendizaje-enseñanza de problemas de estructura aditiva con números de dos cifras (Figura 3). En esta trayectoria destacan dos aspectos de las estrategias de modelización directa: las representaciones con grupos de 10 y el modo de aplicar el conteo. En la Tabla 3, se muestra la frecuencia absoluta de las estrategias de modelización directa, agrupadas atendiendo a estos dos aspectos. Las representaciones de las cantidades pueden reflejar las decenas y las unidades por separado, por ejemplo, al formar colecciones de cantidades de números de dos cifras haciendo barras de 10 para las decenas y cubitos sueltos para las unidades, utilizando los bloques de base 10 o con cartones de decenas de huevos. La Tabla 100 también contiene grupos de 10 si se considera cada fila. Si la representación contiene grupos de 10, el conteo de las cantidades puede hacerse de uno en uno o de 10 en 10.

Tabla 3. Frecuencia absoluta de estrategias de modelización directa con grupos de 10

	Sesiones						
Tipo de agrupamiento y conteo	1	2	6	16	19	22	23
Sin grupos 10, conteo 1 en 1	46	58	44	14	3	17	13
Tabla 100, conteo 1 en 1	9		3	2	4	1	2
Con grupos 10, conteo 1 en 1				11	7		
Con grupos 10, conteo 10 en 10			1	1	4		
Total estrategias registradas	55	58	48	28	18	18	15

Como refleja la Tabla 3, la mayoría de los niños han utilizado representaciones de las cantidades sin agrupamientos de 10. En las sesiones 16 y 19 aparece un aumento de las representaciones separando decenas y unidades que posiblemente se deba a que las cantidades en estos problemas vienen dadas en decenas y unidades. El problema de la sesión 23 también contiene la palabra decena en el enunciado. Sin embargo, los alumnos prefirieron utilizar representaciones sin agrupamientos de 10.

Indivisa, Bol. Estud. Invest. 2016, nº16, pp.167-192
ISSN: 1579-3141

Estos resultados indican que la mayoría de los niños, en primero de educación primaria, realizan modelización directa sin agrupamientos de 10 y contando de uno en uno los elementos. Si los problemas se enuncian con unidades de distinto orden, como son las decenas y unidades, esto permite desarrollar la capacidad de representar las cantidades reflejando el valor posicional de las cifras.

Discusión y conclusiones

Las estrategias que utilizaron los niños en los problemas de estructura aditiva que implican una resta, se ajustan a los resultados de los estudios previos. La estrategia más utilizada en todas las sesiones ha sido quitar. La introducción de distintos materiales y la metodología utilizada en las sesiones han facilitado que surgieran modalidades de usos de las estrategias descritas en el marco teórico de referencia. El uso de materiales, como la Tabla 100 o el rekenrek, ha supuesto estrategias de transición entre las estrategias de modelización directa y las de conteo y la recuperación de hechos numéricos. La incorporación de materiales con agrupamientos de 10, ha permitido la representación de cantidades separando decenas y unidades (Fuson, 1992) aunque han sido utilizadas con mucha menos frecuencia que las representaciones de cantidades con una concepción unitaria (Fuson, 1992). Los problemas que introducen en el enunciado los datos en decenas y unidades facilitan la evolución a las representaciones con agrupamientos de 10. Los niños han comenzado en este curso a usar estrategias inventadas y el algoritmo de la resta, aunque con baja frecuencia. Ante situaciones que les provocan inseguridad con estos procedimientos, vuelven a utilizar estrategias de modelización directa y conteo.

Hay dos ideas fundamentales que se utilizan como instrumentos de análisis en la didáctica de la matemática actual, a las que damos usos diferentes al de los trabajos de referencia: las trayectorias de aprendizaje de Clements y Sarama (2004 y 2009) y los caminos de aprendizaje para una tarea de González y Gómez (2015). Hemos tratado de articular ambas ideas, para abordar en dos niveles diferentes la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático. Tanto las trayectorias de enseñanza-aprendizaje para un contenido, como los caminos de aprendizaje para una tarea, sirven como herramientas para desarrollar el currículo. Partiendo de la interpretación de Clements y Sarama (2009), las trayectorias de enseñanza-aprendizaje nos sirven para estudiar la progresión del conocimiento de un contenido concreto a través de un periodo de tiempo amplio, como puede ser un curso o una etapa educativa, sirviendo de base para guiar el diseño curricular. Desde una perspectiva más puntual, los caminos de aprendizaje para una tarea, permiten planificar y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje del aula en el día a día (González y Gómez, 2015).

Para analizar las estrategias infantiles empleadas para abordar una tarea concreta, hemos utilizado los caminos de aprendizaje para una tarea, descomponiendo las estrategias en capacidades. González y Gómez (2015) los utilizan para identificar y redactar objetivos de aprendizaje y para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Se trata de una ampliación en el rango de uso de un instrumento teórico. El término capacidad, tal como se entiende en los trabajos de González y Gómez (2015), tiene además un gran valor teórico, ya que constituye la unidad mínima de análisis (con una concreción máxima) dentro de las expectativas de aprendizaje. Según nuestra interpretación, las propuestas de documentos curriculares más influyentes en la actualidad, como los Common Core State Standars for Mathematics (CBP & CCSSO, 2010), y de estudios como Clements (2004), presentan las expectativas de aprendizaje en un nivel que consideramos cercano al de las capacidades.

Pensamos que es interesante relacionar el análisis puntual de una estrategia, trazando su camino de aprendizaje como secuencia de capacidades para una tarea, con la localización desde una perspectiva más amplia en el tiempo, del nivel de desarrollo del conocimiento al que pertenece, en la trayectoria de aprendizaje de un contenido. Las capacidades son ingredientes básicos para explicar los caminos de aprendizaje de un problema, y también los cambios que se producen en las trayectorias de aprendizaje de un nivel de desarrollo a otro, permitiendo conocer qué capacidades se deben desarrollar en cada nivel.

Por todo esto, consideramos que el término trayectoria de aprendizaje es una noción que integra perspectivas distintas y es muy potente en la didáctica de la matemática, ya que permite organizar los contenidos de forma articulada, desde un nivel curricular por cursos o etapa, hasta la organización de tareas en la planificación del aula. Desde el punto de vista de la investigación, es una noción muy potente, como instrumento de soporte para la organización de contenidos, expectativas de aprendizaje y diseños instruccionales fundamentados en las teorías de aprendizaje sobre contenidos matemáticos.

Referencias Bibliográficas

- Ambrose, R., Baek, J.M. y Carpenter, T.P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody y A. Dowker (eds.), The development of arithmetic concepts and skills (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Baroody, A.J., Cibulskis, M., Lai, M.-L. y Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 227-260.

- Carpenter, T.P., FrankE, M.L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S.B. (1997). A longitudinal study of intervention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 3-30.

- Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). Children's mathematics: Cognitively guided instruction. Portsmouth: Heinemann.

- CBP y CCSSO (2010). Common core state standards for mathematics. Washington, DC: NGA Center & CCSSO. Recuperado el 24 de julio de 2014 en: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

- Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. En D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (eds.), Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Clements, D.H. y Sarama J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 81-89.

- Clements, D.H. y Sarama J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. Nueva York: Routledge.

- Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D.A. Grouws (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 243-275). New York: Macmillan.

- Ginsburg, H., Jacobs, S.F. y Lopez, L.S. (1998). The teacher's guide to flexible interviewing in the classroom: Learning what children know about math. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria. Tesis doctoral. Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

- Gómez, P., González, M.J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18(3), 319-338. http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL7.pdf

- Gómez, P. y Lupiánez, J.L. (2006). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98.

- González, M.J. y Gómez, P. (2015). Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD 3. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado el 15 de mayo de 2015 de: http://funes.uniandes.edu.co/6454/1/ApuntesModulo3MAD3.pdf

- NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2(1), 1-23. Recuperado el 17 de agosto de 2014 de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/30/34

- NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- NCTM (2006). Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence. Reston, VA: Author.

- NRC (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Kilpatrick, J. Swafford y B. Findell (eds.), Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

- NRC (2009). Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity. C.T. Cross, T.A. Woods y H. Schweingruber (eds.), Committee on Early Chilhood Mathematics, National Research Council.

- Ramírez, M. y De Castro, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J.L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática–2012 (pp-109). Valencia: Universitat de València y SEIEM. Disponible desde 25 de septiembre de 2014 en: http://eprints.ucm.es/25470/1/Ramirez_DeCastro_Valencia2012.pdf

- Ramírez, M. y De Castro, C. (2014a). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. Didácticas Específicas, 11, 40-66.

- Ramírez, M. y De Castro, C. (2014b). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. Épsilon. Revista de Educación Matemática, 31(3), 41-56.

- Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2010). Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 54, 14-30.

- Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114–145.

Anexo. Listado de capacidades

Código Descripción de la capacidad

- C1 Leer un numeral escrito hasta 100.

- C2 Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales ya sean objetos, marcas o dibujos sin agrupamientos.

- C3 Formar una colección de hasta 100 utilizando patrones como los dedos o el rekenrek.

- C4 Formar una colección de hasta 100 con la secuencia de numerales escrita desde el 1 hasta el numeral que indica su cardinal.

- C5 Formar una colección de hasta 100 señalando el numeral en la Tabla 100 y considerando todos los anteriores.

- C6 Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos de otra contando de 1 en 1.

- C7 Quitar o separar una colección de objetos o marcas de patrones como las manos o el rekenrek.

- C8 Quitar los primeros numerales contando desde el uno hasta la cantidad a quitar en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

- C9 Quitar los últimos numerales contando desde el último numeral seleccionado tantos numerales como haya que restar en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

- C10 Determinar el cardinal de una colección de hasta 100 elementos contando de 1 en 1

- C11 Determinar la cantidad representada con patrones como manos o rekenrek.

- C12 Determinar el cardinal de una colección de numerales en una secuencia numérica escrita por el alumno o la Tabla 100, desde el 1 hasta el último numeral, con ese último numeral.

- C13 Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita desde un numeral hasta otro contando de 1 en 1 hacia delante.

- C14 Escribir un número hasta 100 con cifras.

- C15 Escribir un número hasta 100 con palabras.

- C16 Representar varias cantidades distinguiéndolas mediante color, tipo de objeto o posición.

- C17 Representar en correspondencia uno a uno dos colecciones de objetos o marcas para ver su diferencia.

- C18 Completar una colección de elementos distinguiendo los elementos añadidos hasta completar una cantidad.

- C19 Formar una colección con el numeral de su cardinal.

- C20 Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia delante hasta otro, formando una colección de marcas u objetos.

- C21 Reconocer la relación de la suma y la resta.

- C22 Conocer descomposiciones básicas (combinaciones de dos números de una cifra).

- C23 Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos hasta que queda una cantidad comprobada por conteo.

- C26 Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia delante hasta otro llevando el rastro con una colección representada con los dedos o figurativa.

- C30 Añadir una colección de numerales en la Tabla 100 contando a partir de cualquier numeral, tantos como cardinal tiene esa colección, incluso varias veces.

- C31 Distinguir unidades compuestas de unidades simples, por ejemplo en un problema de grupos iguales, distinguir el número de grupos de los elementos por grupo.

- C53 Formar una colección hasta 100 con bloques de base 10 poniendo barras para cada decena grupo de 10 y unidades para las cantidades que no completan una decena

- C54 Determinar el cardinal de una colección hasta 100 contando de 10 en 10 las barras de bloques de base 10 y de uno en uno las unidades.

- C56 Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 entre dos numerales contando de uno en uno empezando desde el mayor hacia atrás.

- C57 Enunciar la secuencia de numerales hacia atrás una cantidad de números dada desde cualquier numeral contando de uno en uno y llevando el rastro con una colección figurativa o con ayuda de los dedos.

- C71 Identificar la posición de las decenas y la posición de las unidades en un número de dos cifras.

- C77 Identificar el número de dos cifras compuesto por un número de decenas y un número de unidades.

- C79 Agrupar las barras de 10 por un lado y las unidades por otro, tras considerar juntas varias colecciones representadas con bloques de base 10, cambiando 10 unidades por una decena si es necesario.

- C81 Organizar dos números de dos cifras en un algoritmo colocando las unidades en una columna y las decenas en la otra.

- C82 Empezar el procedimiento de un algoritmo por las unidades.

- C88 Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales ya sean objetos, marcas o dibujos con grupos de 10.

- C89 Determinar el cardinal de una colección hasta 100, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno los elementos sueltos.

- C100 Formar una colección de hasta 100 elementos con hueveras, colocando un cubo encajable en cada hueco.

Indivisa, Bol. Estud. Invest. 2016, nº16, pp.167-192
ISSN: 1579-3141

- C108 Pedir prestado una decena para poder restas las cifras de una columna en la que el número a restar es mayor que el número del minuendo.

- C110 Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia atrás hasta otro llevando el rastro con una colección representada con marcas u objetos.

- C112 Sumar a un número de dos cifras las unidades necesarias para llegar a la siguiente década.

- C113 Calcular el número de decenas que hay de una década a otra

- C114 Restar primero la decenas y luego las unidades.