



Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería

ISSN: 0718-3291

facing@uta.cl

Universidad de Tarapacá

Chile

Moreno Martínez, Nehemías; Font Moll, Vicenç; Ramírez Maciel, Juan C.
La importancia de los diagramas en la resolución de problemas de cuerpos deformables
en Mecánica: el caso de la fuerza de fricción
Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería, vol. 24, núm. 1, enero, 2016, pp. 158-172
Universidad de Tarapacá
Arica, Chile

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77243535015>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

La importancia de los diagramas en la resolución de problemas de cuerpos deformables en Mecánica: el caso de la fuerza de fricción

The importance of the diagrams in the resolution of problems concerned deformable bodies in Mechanics: the case of friction forces

Nehemías Moreno Martínez¹

Vicenç Font Moll²

Juan C. Ramírez Maciel¹

Recibido 8 de abril de 2014, aceptado 22 de abril de 2015

Received: April 8, 2014 Accepted: April 22, 2015

RESUMEN

En esta investigación se analiza la solución de un grupo de estudiantes universitarios a un problema mecánico que involucra a un cuerpo deformable. Como contexto de investigación se considera el problema del corredor y se investigan las concepciones sobre la fuerza de fricción a partir de los diagramas elaborados en la resolución del problema. Para ello, se utilizan y adaptan algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Los participantes fueron 71 alumnos de ingeniería de una universidad de México. El análisis de los diagramas muestra que los estudiantes tienen dificultades para emplear la condición de maximización de la fuerza de fricción y para asignar un sentido adecuado a dicha fuerza. Así mismo, se muestra la importancia de llevar a cabo un proceso de idealización, en el que el corredor es pensado como un punto sobre el cual actúan tres fuerzas, como condición necesaria para la solución de la tarea.

Palabras clave: Cuerpo deformable, fuerza de fricción, diagramas, configuración epistémica y cognitiva, proceso de idealización.

ABSTRACT

In this research is analyzed the solution given by a group of college students to a mechanical problem involving a deformable body. As a research context we consider the problem of the runner and investigate the conceptions of the friction force starting from the diagrams made in the solution of the problem. For this purpose, some theoretical tools of the Onto-Semiotic Approach to research in mathematics education are used and adapted. The participants were 71 engineering students from a university in Mexico. The analysis of the diagrams shows that the students have difficulties to employ the condition to optimize friction force and to assign an adequate meaning to it. Likewise, we show the importance to execute a process of idealization, in which the runner is intended as a point on which three forces act, as a necessary condition to the solution of the task.

Keywords: Deformable body, frictional force, diagrams, epistemic and cognitive configuration, idealization process.

¹ Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México. E-mail: nehemias_moreno@live.com; jermaciel@yahoo.com.mx

² Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica. Universitat de Barcelona. Barcelona, España. E-mail: vfont@ub.edu

INTRODUCCIÓN

La noción de fuerza fricción o de fuerza de rozamiento ha sido investigada desde diversas perspectivas en el área de la Didáctica de la Física. Algunos investigadores se han enfocado en el tratamiento que realizan los libros textos y su influencia en el aprendizaje [1,6], otros han estudiado las ideas previas y el razonamiento de los estudiantes [7, 21, 23] y otros han sugerido que la discusión grupal podría ayudar a clarificar las preconcepciones de los alumnos [13], o bien han analizado las dificultades de aprendizaje que tienen los estudiantes en torno a dicha fuerza [5, 15, 25]. Por otra parte, también se han propuesto secuencias didácticas que se consideran idóneas para su enseñanza [3-4, 24].

Estas investigaciones muestran algunas de las dificultades que tienen los alumnos para el aprendizaje de la fuerza de fricción y ponen de manifiesto la relevancia de investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre dicha fuerza. La complejidad de la actividad físico-matemática necesaria para resolver tareas en las que está involucrada dicha fuerza está presente de manera implícita en estas investigaciones, pero en ellas no hay una caracterización exhaustiva de dicha complejidad.

Situados en esta problemática, en este artículo se describe una investigación cuyo objetivo fue caracterizar exhaustivamente la complejidad de la actividad físico-matemática (en términos de prácticas, contenidos y procesos, tanto físicos como matemáticos) que realiza un grupo de estudiantes al resolver problemas en los que está involucrada la fuerza de fricción. Dicha caracterización supone un avance en la investigación de la comprensión de los estudiantes sobre la fuerza de fricción ya que permite tanto (1) explicar mejor las causas de los errores y dificultades en el aprendizaje de los alumnos, como (2) sugerir recomendaciones para su enseñanza.

Se ha partido del supuesto de que la fuerza de fricción posee dos componentes indisociables, uno físico y otro matemático, que son esenciales para la comprensión adecuada de los fenómenos que se organizan mediante el constructo “fuerza de fricción”. La importancia del componente matemático nos ha llevado a utilizar y adaptar un marco teórico y metodológico que provienen de la Didáctica

de la Matemática, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS, en adelante) [11].

Este enfoque se está desarrollando y utilizando principalmente como referente teórico para la investigación en educación matemática y, recientemente, algunos investigadores lo han aplicado a la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Física [2, 8,17].

En esta investigación se analiza la solución de un grupo de estudiantes universitarios al llamado problema del corredor, en particular el papel que tienen los *diagramas* (en los que interviene la fuerza de rozamiento) en la actividad físico-matemática realizada por los alumnos. Para ello, de acuerdo con el EOS, dicha actividad se modela en términos de prácticas físico-matemáticas, configuraciones epistémicas de objetos primarios y procesos activados en dichas prácticas.

El término *diagrama* [27] es empleado en el sentido de Peirce, el cual es un tipo de icono con el que se representan relaciones inteligibles entre un conjunto de objetos. Según el EOS, éstos pueden ser de tipo institucional si son construidos por un experto (y se corresponden con el llamado diagrama de cuerpo libre) o personal si son construidos por un estudiante (el cual podría ser una representación ostensiva similar o igual al diagrama de cuerpo libre).

El trabajo incluye los siguientes apartados además de esta introducción. En la segunda sección se presenta una revisión bibliográfica de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la fuerza de fricción. En la tercera, se presenta el objetivo de la investigación, mientras que en la cuarta se describe la metodología utilizada y se explican algunos elementos teóricos provenientes del EOS, que se han utilizado para el análisis de las respuestas que dan los estudiantes al problema del corredor, en particular las nociones de configuración, epistémica y cognitiva, de objetos primarios.

En la quinta sección se analizan y clasifican las respuestas de los participantes –se realiza una primera clasificación en función de que el diagrama de la respuesta muestre un proceso de idealización que convierte al corredor en un punto; a continuación, para las respuestas en las que se muestra dicho

proceso de idealización, se hace una segunda clasificación en función de que la respuesta sea correcta. Finalmente, en la última sección, se enuncian algunas conclusiones e implicaciones para la enseñanza de la fuerza de rozamiento.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En las investigaciones donde se han analizado libros de texto universitarios [6,1] se señala que el rozamiento es estudiado exhaustivamente a través de la situación problema del bloque que se mueve sobre una superficie de apoyo, así como variantes de ésta, y advierten de las dificultades que genera este tipo de diagramas para la comprensión de la fuerza de rozamiento. Se trata de una situación macroscópica que ya está presente en los trabajos de Leonardo da Vinci y en el de los físicos Guillaume Amontons y Charles Augustin Coulomb [18]. Estos autores señalan, además, que lo que se sabe actualmente sobre la fricción no se ha incorporado en los libros de texto y que, por otra parte, estos no tienen en cuenta las ideas previas de los estudiantes.

Por su parte, en [15] se señala que los alumnos que estudian los últimos cursos de la formación inicial para ser profesor de física tienen dificultades para identificar el punto de aplicación de la fuerza de rozamiento y tienen cierta confusión acerca de cuál es el cuerpo que ejerce la fuerza, no especifican el sistema de referencia cuando describen algún movimiento y no están habituados además al empleo de la tercera ley de Newton cuando consideran el rozamiento. Así mismo, en [25] se sugiere que:

“(…) existe una marcada inclinación manifestada por los maestros a considerar las fórmulas como parte esencial de la teoría, (...) para muchos es más importante la fórmula de la fuerza de rozamiento estático que la segunda ley de Newton, y no encuentran dificultad en negar el cumplimiento de ésta con tal de salvar aquélla” (p. 254).

En [5] se reporta que, en situaciones que involucran el rodamiento de cuerpos, los futuros profesores de ciencias emplean los mismos razonamientos para partículas (un cuerpo cuyas dimensiones físicas se desprecian cuando se describe su movimiento) que para cuerpos rígidos (una esfera, un cilindro, etc.), lo cual los conduce a malas interpretaciones relacionadas con el sentido de la fuerza de rozamiento.

En otras investigaciones [7] se analizan las interpretaciones de los estudiantes universitarios sobre la fuerza de rozamiento en el movimiento circular, y se señala la contradicción que hay entre la interpretación correcta (dirigida hacia el centro de la trayectoria circular, por lo que debería ser pensada como opuesta a la tendencia del movimiento, en el sentido de proceso, desarrollo o propensión) y la de muchos estudiantes que consideran que la fuerza de rozamiento siempre está determinada por la dirección de la velocidad.

Al analizar las ideas previas de los estudiantes en otras situaciones que no son prototípicas donde se presenta la fuerza de rozamiento, en [14] y [21] reportan que muchos alumnos argumentan que la acción o resistencia de un medio no es una fuerza, ya que no inicia ni sostiene un movimiento. En otras investigaciones se ha puesto atención a los modos de razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de rozamiento estático [23], y se han formulado además propuestas didácticas para la enseñanza de la fuerza de rozamiento al sugerir cómo aprovechar los errores e imprecisiones de los libros de texto en torno a la fuerza de rozamiento [4], al proponer la utilización de programas de simulación para una mejor comprensión de la aplicación del concepto de fuerza de rozamiento al análisis de fenómenos reales [21] y presentar a los estudiantes secuencias didácticas a través de experimentos en distintas situaciones físicas en las que se presenta el rozamiento para hacer más sofisticado el razonamiento de los estudiantes, en lugar de incentivar la repetición de reglas abstractas basadas en objetos ideales [3].

Asimismo [6], al analizar una muestra de libros de Física, concluyen de manera general que los textos describen leyes empíricas para la fuerza de rozamiento entre sólidos y clasifican la fuerza de rozamiento en dos tipos: en estática \vec{f}_e , entre superficies en reposo, y cinética \vec{f}_c , entre superficies en movimiento relativo. Con relación al sentido de la fuerza de rozamiento, la explicación que dan estos textos es que, cuando la superficie de un cuerpo se desliza sobre otro, los dos cuerpos ejercen una fuerza de rozamiento entre ellos. La fuerza de rozamiento de cada cuerpo es de dirección opuesta a su movimiento relativo con relación al otro cuerpo. Las fuerzas de rozamiento se oponen automáticamente a este movimiento relativo y nunca contribuyen a él.

Un ejemplo de los libros de textos analizados por [6] es el de [22]. Estos últimos autores plantean que la magnitud de la fuerza de rozamiento: (1) es casi independiente del área de contacto y (2) es proporcional a la magnitud de la fuerza normal \vec{N} (esta última es debida a las propiedades elásticas de los cuerpos en contacto y, por lo general, es igual al peso del cuerpo o a alguna de sus componentes). Por otra parte, el cociente entre la magnitud de la fuerza máxima de rozamiento estática y la magnitud de la fuerza normal se llama coeficiente de rozamiento estático μ_e de las superficies implicadas y se establece que $f_e \leq \mu_e N$, donde el signo de igualdad se obtiene cuando f_e adquiere su valor máximo. Así mismo, [22] señala que la fuerza de rozamiento cinética f_c entre superficies secas no lubricadas también cumple con las mismas leyes y es independiente de la velocidad relativa entre los cuerpos. La relación entre la magnitud de la fuerza de rozamiento cinético y la magnitud de la fuerza normal se llama coeficiente de rozamiento cinético μ_c y se establece que $f_c = \mu_c N$. En general, los valores de estos coeficientes dependen del material de las superficies en contacto y se tiene que $\mu_e > \mu_c$, por lo que la máxima fuerza de rozamiento estática siempre es mayor que la fuerza de rozamiento cinética.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En las explicaciones de un profesor en su clase y en los textos de Física, se emplean comúnmente representaciones visuales, modelos tridimensionales, etc. Ahora bien, muchas veces el dibujo deja a cargo del lector completar la información. De manera inversa, los diagramas que utilizan los alumnos al resolver tareas de Física, son el resultado de una actividad físico-matemática donde se usan conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, y se ponen en juego procesos diversos, entre otros los de significación y visualización. Si se utiliza la metáfora del iceberg, la producción ostensiva de los alumnos es solo una parte de la compleja trama de prácticas, uso de leyes, procedimientos, procesos, etc. que se han activado para responder la tarea requerida.

La investigación que se presenta está relacionada con esta compleja trama de la que los diagramas son la parte más visible. En concreto, estudia la complejidad de la actividad físico-matemática

(caracterizada en términos de prácticas, contenidos y procesos, tanto físicos como matemáticos) realizada para resolver un problema en el que se presentan fenómenos reales y en cuya solución los diagramas, en los que interviene la fuerza de rozamiento, juegan un papel esencial.

La fuerza de rozamiento admite básicamente dos conceptualizaciones [3], como fuerza de reacción donde juega un rol motriz y como fuerza que se opone al movimiento, donde juega un papel resistivo. Los problemas más habituales son aquellos en los que la fuerza de rozamiento se entiende como fuerza resistiva aplicada a un cuerpo sólido inerte (por ejemplo, un bloque que se desliza por un plano inclinado). En esta investigación, para poder resaltar mejor el papel que juegan los diagramas, hemos seleccionado un problema en el que se presenta el caso de un ser vivo (un corredor) donde la conceptualización más adecuada es la de reacción.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En esta investigación, de acuerdo con el EOS [10-11], se ha caracterizado la actividad físico-matemática que realizan los estudiantes con el propósito de resolver el problema propuesto, en términos de prácticas, y configuraciones epistémicas y cognitivas de objetos primarios, así como de procesos activados en dichas prácticas.

En el EOS, dada una tarea, se entiende por práctica matemática la realización de una secuencia de acciones, sujetas a reglas matemáticas, que llevan a la solución de la tarea propuesta. En el caso que nos interesa, la tarea es de física (el problema del corredor) y, por tanto, la secuencia de acciones está sujeta a reglas físico-matemáticas. Para la realización de la práctica que permite resolver el problema propuesto, el alumno necesita interpretar y realizar ciertas representaciones, las cuales son la parte ostensiva de una serie de definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos que permiten la solución del problema. En el EOS, al conjunto formado por la tarea que desencadena la práctica (definiciones, proposiciones, procedimientos, representaciones y argumentos utilizados) se le llama configuración de objetos primarios. Se distingue entre configuraciones epistémicas cuando se trata de la configuración que realizaría un experto

(perspectiva institucional) y configuraciones cognitivas cuando se trata de las que realiza cada alumno (perspectiva personal).

Si se aplica la perspectiva proceso-producto a los componentes de las configuraciones, se tiene que si hay una representación es porque se ha producido un proceso de representación, si hay un argumento, un proceso de argumentación, etc. Por tanto, además de prácticas y configuraciones, conviene tener en cuenta, para analizar la actividad físico-matemática realizada al resolver la tarea propuesta, los procesos que se derivan de aplicar la dualidad proceso-producto a las configuraciones, junto a otros procesos que también son relevantes, como son el de visualización [12], idealización [9], significación, etc. A manera de ejemplo, en la física escolar, se puede distinguir entre práctica, objetos primarios y procesos si consideramos a la actividad involucrada en la tarea de calcular la velocidad y la aceleración de un cuerpo que tiene un movimiento armónico simple expresado por

$x(t) = 0.3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$. En dicha tarea, los estudiantes llevan a cabo una secuencia de acciones (práctica) tales como (1) la lectura del enunciado y (2) el cálculo de la primera y segunda derivada mediante la regla de la cadena para derivar funciones compuestas:

$$x'(t) = -0.6\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ y } x''(t) = -1.2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right),$$

el cual es un procedimiento, considerado como un tipo de objeto primario en el EOS. Cuando los estudiantes resuelven ejercicios similares, llevan a cabo un proceso de automatización.

Nuestra investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto [16], puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de las respuestas de los alumnos al problema del corredor: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de solución del problema propuesto).

En el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de análisis de [19-20], que permite describir sistemáticamente las configuraciones epistémicas y cognitivas (situación-problema, representaciones, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas que permiten la solución de la tarea propuesta. Primero se

describe una configuración epistémica de referencia (solución experta), después la configuración cognitiva de los alumnos y por último se hacen comparaciones entre ambas.

La metodología empleada tomó en cuenta cuatro ejes que en el EOS se designan como el *foco*, el *fin*, la *generalizabilidad* y el *nivel de la investigación*. El *foco* fue *epistémico* (configuraciones epistémicas) y también *cognitivo* (configuraciones cognitivas). El *fin* estuvo relacionado a la *descripción* de significados personales de los alumnos, mediante el estudio de sus configuraciones cognitivas. El nivel de *generalizabilidad* tuvo carácter *exploratorio* ya que no se pretendía generalizar los resultados a otros contextos o poblaciones, mientras que el *nivel* de análisis fue *puntual*, debido a que se pretendió investigar las concepciones sobre la fuerza de fricción ligados al estudio del empleo de los diagramas en el contexto del corredor.

Participantes

Los participantes fueron 71 alumnos de entre 19 y 20 años de edad que cursaban el tercer semestre en la Facultad de Ciencias Químicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Estos alumnos habían aprobado recién el curso de Física General donde se estudian los principios de la mecánica newtoniana.

Diseño del cuestionario

La tarea propuesta a los estudiantes fue un cuestionario de 17 preguntas de respuesta múltiple en torno a la situación física del arranque de un corredor. Se trata de una adaptación a un problema propuesto en el libro [22]. Se seleccionó dicha tarea porque, tal como lo sugieren estos autores, la actividad que realizan los alumnos para resolverla permite evidenciar la comprensión de la noción de fuerza de rozamiento. La adaptación consistió en:

1) Añadir al texto la Figura 1, la cual muestra posiciones diferentes del corredor A, B y C, así como comentarios sobre ellas. La modificación del problema original fue por motivos didácticos puesto que la fuerza de rozamiento cambia de sentido durante la carrera, por lo que mediante la Figura 1C se sugiere a los estudiantes el intervalo de tiempo en el que la fuerza de fricción tiene el mismo sentido que el movimiento del cuerpo del corredor. Este escenario plantea una situación distinta a lo que

se presenta frecuentemente en los textos de física donde se señala que la fuerza de fricción siempre se opone al movimiento de los cuerpos.

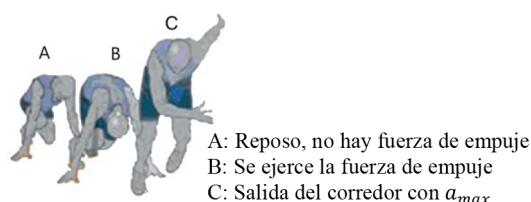


Figura 1. Posiciones A, B y C del corredor.

2) Formular 17 preguntas (ver Anexo) de respuesta múltiple (3 o 4 posibles respuestas). Se optó por el formato de elección múltiple después de hacer una prueba piloto de respuesta abierta con 30 estudiantes con las mismas características; las respuestas de estos estudiantes sugirieron muchas de las respuestas que se incorporaron al cuestionario definitivo.

Las 17 preguntas del cuestionario se agruparon en siete bloques. En el primer bloque se investiga el sentido de la fuerza de rozamiento y la resolución del problema, preguntas 1 y 16 respectivamente. El segundo (preguntas 2 a 4) indaga las fuerzas que actúan cuando el corredor se encuentra en A, B y C. El tercero (preguntas 5 a 7) averigua el efecto de la fuerza de fricción en el movimiento del corredor y la representación de las fuerzas en las posiciones A y C del corredor en la Figura 1. El cuarto (preguntas 17) indaga la primera ley de Newton mediante el empleo de un marco de referencia. En el quinto (preguntas 8, 9 y 15) se investiga la segunda ley de Newton mediante la condición de aceleración máxima. Mediante el sexto (preguntas 12, 13 y 14) se investiga la tercera ley de Newton al considerar la fuerza de fricción como fuerza de reacción. Y con el último bloque (preguntas 10 y 11) se investiga la consideración de la propiedad P4 (Tabla 1) mediante la condición de resbalamiento y del valor máximo de la fuerza de fricción estática.

Práctica, configuración epistémica y procesos

Para resolver la tarea el experto debe realizar una práctica físico-matemática que consiste en la lectura del texto de la tarea y en la producción de un texto con las respuestas a las distintas cuestiones planteadas, y que será el resultado de una serie de acciones sujetas a reglas físico-matemáticas.

Puesto que el problema no se trata del movimiento de un cuerpo rígido, en donde el movimiento pueda ser modelado como la combinación de un movimiento de traslación y otro de rotación. El resolutor experto realiza un tratamiento del problema similar al presentado en [26] considerando el intervalo de tiempo que va de A a C según la Figura 1. Por lo cual, el experto modela al corredor como una partícula situada en el contacto con la pista y representa mediante un diagrama, desde la perspectiva de un marco de referencia en reposo, a tres fuerzas (peso, fuerza normal y rozamiento) actuando sobre dicha partícula.

En la Tabla 1 se presenta la configuración epistémica activada en la solución de la tarea, la cual se obtuvo después de una triangulación de expertos aplicada a una primera propuesta realizada por los autores:

Tabla 1. Configuración epistémica de referencia. Solución experta a la tarea.

SITUACIÓN PROBLEMA
Tarea del corredor
LENGUAJE
–Representación diagramática donde intervienen: <ul style="list-style-type: none"> • Términos físicos: Masa, Fuerza ejercida por el corredor (fuerza de empuje), Peso, Aceleración, fricción, etc. • Símbolos: aceleración “a” y “g”, masa “m”, coeficiente de fricción estático “μ_e” y tres fuerzas “f”, “w” y “N”. • Representaciones gráficas: el corredor como ícono y luego como un punto, un sistema coordenado cartesiano, las tres fuerzas representadas mediante flechas “\rightarrow” (diagrama de cuerpo libre). –Expresiones algebraicas: peso “ mg ”, segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, fuerza de rozamiento $f = \mu_e N$ y la aceleración máxima “ a_{max} ” del corredor mediante $a_{max} = \mu_e g$.
CONCEPTOS
–Físicos: fuerza, fuerza de fricción, masa, aceleración y mayor aceleración. –Matemáticos: vector, dirección, sentido, magnitud, vector opuesto, suma vectorial, componentes de un vector, escalar, sistema coordenado cartesiano.
PROPIEDADES
–1. ^a ley de Newton (P1): Un cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme mientras no actúe alguna fuerza externa que altere dicho estado mecánico.

<p>–2.^a ley de Newton (P2): La fuerza resultante sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración.</p> <p>–3.^a ley de Newton (P3): A cada fuerza de acción sobre un cuerpo le corresponde una fuerza de reacción de igual magnitud pero de sentido opuesto.</p> <p>–El rozamiento estático f_e se incrementa desde cero hasta un valor máximo $f_e = \mu_e N$, a partir del cual las superficies en contacto se deslizan (P4).</p>
PROCEDIMIENTO
<p>–Transformación de la representación icónica del corredor en un diagrama (representación del sistema de coordenadas y de vectores en este sistema).</p> <p>–Aplicación de P1 para establecer un marco de referencia en reposo (si el marco de referencia se mueve a velocidad constante la descripción sería un poco más compleja) respecto al cual se describe la dinámica del corredor.</p> <p>–Considerar que no hay movimiento vertical, de manera que la fuerza normal N contrarresta el peso del corredor, $N = mg$.</p> <p>–Aplicación de P3 para establecer que el rozamiento es una fuerza de reacción al empuje.</p> <p>–Relacionar la fuerza normal con la fuerza de rozamiento máxima mediante la condición $f_e = \mu_e N = \mu_e mg$.</p> <p>–Aplicación de P2 para calcular la aceleración máxima a_{max} que puede adquirir el corredor.</p>
ARGUMENTO
<p>Tesis: La aceleración máxima es el producto del coeficiente de fricción estático por la aceleración de la gravedad ($a_{max} = \mu_e g$).</p> <p>Razones:</p> <p>–La aplicación de las tres leyes de Newton permiten afirmar que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Las fuerzas: (a) peso y fuerza normal, se cancelan mutuamente, pues de lo contrario habría movimiento vertical y (b) el empuje es la fuerza que ejerce el corredor sobre el suelo para recibir, como reacción a ésta, la fuerza de rozamiento estática que permite su movimiento. • En el problema planteado (ver las posiciones sucesivas A, B y C de la Figura 1) la fuerza de rozamiento tiene el mismo sentido que el movimiento del corredor. • Cuando el corredor adquiere una aceleración máxima "a_{max}", la máxima fuerza de rozamiento es "$f = \mu_e N = \mu_e mg$". • Se cumple que $\mu_e mg = ma_{max}$, de manera que la aceleración máxima que potencialmente podría provocar la fuerza de empuje sería $a_{max} = \mu_e g$. Esta no es la aceleración del corredor a lo largo de una carrera. <p>–El corredor resbala si la fuerza de rozamiento estático supera su valor máximo</p>

Los elementos de esta configuración (desde la perspectiva proceso-producto) conllevan procesos como el de visualización e idealización, entre otros. Según [12] se puede hablar de configuraciones de objetos primarios visuales, cuando éstos conllevan procesos de visualización. La tarea del corredor se puede considerar una tarea visual según las dos características que proponen [12]: a) Comunicación de la forma, sus componentes y estructura, de objetos espaciales, o bien de objetos imaginados (pensados o ideales) y b) Comunicación de la posición relativa de objetos en el espacio. En efecto, ambas se cumplen ya que:

a) La tarea comunica información visual. Se explicitan los componentes (corredor y suelo), forma (pista plana), se sugiere movimiento (mediante el dibujo de varias posiciones del corredor) y se espera que el alumno realice un proceso de idealización y entienda que el corredor se puede considerar como un punto (objeto ideal). Esta información debe ser transformada por el alumno en una representación en el plano (bidimensional) con la misma estructura que la situación real espacio-temporal (tridimensional) que se supone descrita en el texto.

b) La tarea comunica la posición relativa de objetos en el espacio (por ejemplo, el corredor está arriba y el suelo abajo). Para resolver el problema, el alumno debe especificar un marco de referencia para describir la acción de las fuerzas que actúan sobre la extremidad del corredor en contacto con la pista.

Además de estas dos características visuales de tipo estático, está presente otra característica que también está relacionada con la visualización, la cual es:

c) La comunicación de información de tipo dinámico (la información de las posiciones sucesivas de la extremidad del corredor pretende sugerir un movimiento rotacional, como si se tratase del rodaje de una película).

De manera análoga, la mayoría de los conceptos, procedimientos, representaciones, propiedades y argumentos de esta configuración epistémica también se pueden considerar como "visuales", de acuerdo a la caracterización de [12].

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Los estudiantes tuvieron serias dificultades para resolver el problema del corredor. En la Figura 2 se muestra el porcentaje de respuestas correctas en relación con las preguntas del cuestionario.

Según el bloque 2, las *preguntas 2, 3 y 4*, el 59%, 39% y 42% de los estudiantes respectivamente señalaron correctamente a las fuerzas presentes en las posiciones A, B y C del corredor (Figura 1). Sin embargo, en el bloque 1, *preguntas 1 y 16*, el 17% de los alumnos representó correctamente el sentido de la fuerza de fricción en B y C, el resto lo dibujó en sentido opuesto al movimiento del corredor.

Mientras que en el bloque 3, en la *pregunta 5*, el 64% de los alumnos describió correctamente el efecto de la fuerza de fricción como aquella que hace posible el movimiento del corredor. En las *preguntas 6* el 46% representó adecuadamente a las fuerzas en la posición A, y la *pregunta 7* verificó el resultado de las *preguntas 1 y 16*.

En el bloque 4, *pregunta 17*, sólo el 52% de los estudiantes consideró necesario emplear el maco de referencia en la solución del problema.

Por otra parte, en bloque 5, fueron pocos los estudiantes que consideraron la segunda ley de Newton. En las *preguntas 8 y 15*, cerca del 30% señaló una relación entre el empuje y el incremento de la aceleración, el resto sugirió que una fuerza de empuje constante. En la *pregunta 9*, el 21% de los alumnos señaló correctamente la condición de aceleración máxima.

En relación con el bloque 6, las respuestas a las *preguntas 12 y 13* muestran que aproximadamente el 60% de los estudiantes consideró necesario emplear la tercera ley de Newton para describir el movimiento. Sin embargo, según la *pregunta 14*, sólo el 43% de los estudiantes consideró a la fricción como una fuerza de reacción al empuje.

Los resultados de los bloques 1, 5 y 6 nos sugieren que un porcentaje relevante de los alumnos investigados considera a la fuerza de rozamiento, como aquella que dificulta el movimiento de los cuerpos, y no como fuerza de reacción, pues muchos consideran a dicha fuerza de magnitud constante y de sentido opuesto el movimiento del cuerpo del corredor. Se

trata de un resultado relevante si se tiene en cuenta que estos alumnos habían aprobado un curso de Física en el que habían estudiado la mecánica newtoniana.

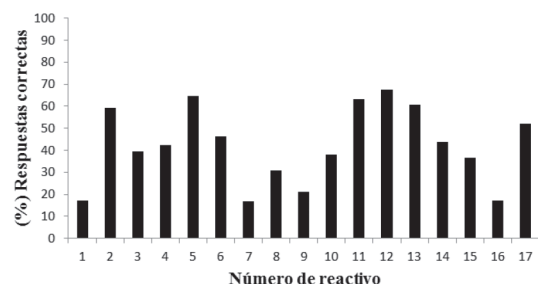


Figura 2. Porcentaje de respuestas correctas a las preguntas del cuestionario.

Por último, en el bloque 7, las respuestas a la *pregunta 10* señalan que el 38% sugirió correctamente la condición de resbalamiento y en la *pregunta 11* el 63% identificó la relación entre la fuerza de fricción y el peso del corredor.

Las cifras anteriores nos muestran la manera en que los estudiantes conciben a la fuerza de fricción en el contexto del problema del corredor.

El análisis de estas concepciones se llevó a cabo al comparar la configuración epistémica, Tabla 1, con las configuraciones cognitivas de algunos estudiantes. La presencia (o no) de algunos elementos de la primera en las configuraciones cognitivas de los estudiantes, se utilizó como criterio para realizar una clasificación de las respuestas de los estudiantes. Para esto, las producciones de los estudiantes, en particular la de los diagramas, fueron importantes al evidenciar la realización de ciertos procesos tales como el de idealización.

Para resolver correctamente la tarea, el alumno debe hacer un proceso de idealización que le lleva a “concentrar” al corredor en el punto de contacto con la pista. Dicho proceso es una condición necesaria para la solución correcta debido a que el pie del corredor tiene un movimiento en sentido opuesto al movimiento del resto del cuerpo; es decir, idealizar al corredor en el punto de contacto del pie con la pista permitiría asignar después un sentido correcto a la fuerza de rozamiento.

Tomando en cuenta las producciones de los estudiantes en el bloque 1, las respuestas de los

estudiantes fueron clasificadas en cuatro grupos: (1) los que *idealizan* y resuelven correctamente, (2) los que *idealizan* y no resuelven correctamente, (3) los que *no idealizan* y resuelven correctamente y (4) los que *no idealizan* y no resuelven correctamente, Figura 3. El problema sólo fue resuelto correctamente por aquellos estudiantes que idealizaron.

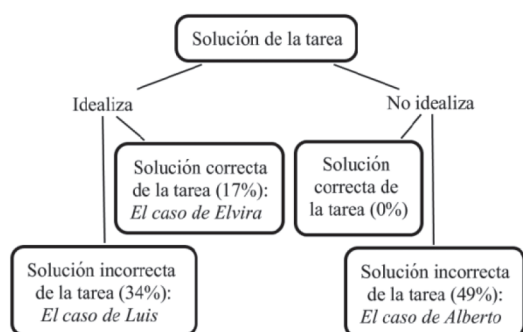


Figura 3. Clasificación de las respuestas de los alumnos.

Tomando en cuenta esta clasificación, a continuación se presentan los casos de los alumnos Luis, Elvira y Alberto para describir dos aspectos relacionados con la fuerza de fricción donde los estudiantes tuvieron más dificultades: (i) el sentido de la fuerza de rozamiento y (ii) la maximización de la aceleración del corredor. En ambos casos se toman en cuenta los diagramas de tipo personal construidos por los estudiantes, los cuales son similares al diagrama de cuerpo libre que fue sugerido en la solución experta, Tabla 1.

(i) Sentido de la fuerza de rozamiento

En las respuestas a las preguntas 1-4 del cuestionario, los estudiantes asignaron correctamente la dirección y el sentido a la fuerza normal y al peso del corredor, pero no sucedió lo mismo con el sentido de la fuerza de fricción.

A continuación se presenta el caso de dos estudiantes, el primero que, desde nuestra perspectiva, realiza el proceso de idealización pero que no resuelve correctamente la tarea, el caso de Luis; y el segundo que sí realiza el proceso de idealización y resuelve la tarea de manera adecuada, el caso de Elvira.

El caso de Luis

En la Tabla 2 se presenta la configuración cognitiva del alumno Luis, perteneciente al 83% de alumnos

mencionado anteriormente, la cual se infiere de su respuesta, ver la Figura 4.

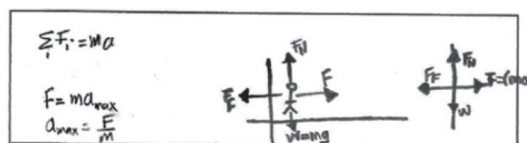


Figura 4. Diagrama de Luis. Representa la fricción F_f , el empuje F , la fuerza normal F_N y el peso W .

Este alumno interpreta la fuerza de rozamiento como aquella que se opone al movimiento y toma en cuenta cuatro fuerzas: el peso, la fuerza normal, el empuje del corredor y el rozamiento (de sentido incorrecto). Así mismo, realiza una representación icónica diagramática incorrecta de la tarea, a pesar de haber idealizado, pues primero hace un proceso de esquematización del corredor y después un proceso de idealización que le lleva a “concentrar” al corredor en el punto de contacto con la pista. Sin embargo, cabe señalar que idealizar al corredor en el punto de contacto del pie con la pista sólo es una condición necesaria para asignar un sentido correcto a la fuerza de rozamiento, pero no es una condición suficiente, como se puede observar en la respuesta incorrecta de este alumno.

En su representación diagramática (parte central y derecha de la Figura 4) puede notarse que las fuerzas presentes en la situación son representadas mediante flechas (y letras que las acompañan). En ella, se pueden observar dos aspectos importantes sobre estas flechas:

(i) La fuerza de rozamiento F_f es de sentido opuesto (hacia la “izquierda”) a la del movimiento del corredor (hacia la “derecha”).

(ii) Según Luis, la fuerza F hacia la “derecha” que causa el movimiento del corredor es la fuerza de empuje del corredor.

En la configuración se observa que además de una representación incorrecta por parte del alumno (dibuja la fuerza de rozamiento opuesta al movimiento del corredor y cuatro fuerzas actuando sobre él), también emplea de manera inadecuada P2 al atribuir la aceleración del corredor a la acción directa de la fuerza de empuje y no a la fuerza de rozamiento.

Tabla 2. Configuración cognitiva de Luis.

SITUACIÓN PROBLEMA
Tarea del corredor
LENGUAJE
<p>–Representación diagramática en la que intervienen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Términos físicos</i>: ninguno (en el diagrama no se escribe ningún término). • <i>Símbolos</i>: aceleración “a” y “g”, masa “m”, cuatro fuerzas F_N, F_F, W y F. • <i>Representaciones gráficas</i>: el corredor representado como ícono y luego como un punto. Un plano cartesiano y cuatro fuerzas representadas por flechas (\rightarrow). <p>–<i>Expresiones algebraicas</i>: expresión algebraica del peso $W=mg$, de P2 ($\sum_i F_i=ma$ y $F=ma_{max}$) y expresión algebraica de la aceleración máxima ($a_{max}=F/m$).</p>
CONCEPTOS
<p>–<i>Físicos</i>: fuerza, fuerza de rozamiento, masa y aceleración.</p> <p>–<i>Matemáticos</i>: vector, dirección, sentido, magnitud, vector opuesto, suma y resta de vectores, componentes de un vector, escalar, sistema coordenado cartesiano.</p>
PROPIEDADES
<p>–Considera P1 de manera adecuada.</p> <p>–Considera P2 inadecuadamente empleando el empuje “F” del corredor.</p> <p>–Considera P3 en la acción de las fuerzas perpendiculares al movimiento.</p> <p>–No considera P4.</p>
PROCEDIMIENTO
<p>–Representación de un plano cartesiano y vectores en ese sistema.</p> <p>–Emplea P1: establece el marco de referencia y señala que no hay movimiento vertical.</p> <p>–No emplea P3: el rozamiento no es una fuerza de reacción al empuje.</p> <p>–No emplea P2 correctamente: el empuje del corredor (y no la fricción) impulsa al corredor.</p> <p>–No emplea P4: No relaciona la fuerza normal con la fuerza de rozamiento.</p>
ARGUMENTOS
<p>Tesis: La aceleración máxima es el cociente entre la fuerza de empuje “F” y la masa del corredor.</p> <p>Razones:</p> <p>–Considerando P1-P3 afirma que:</p>

- Las fuerzas: (a) peso y fuerza normal, se cancelan mutuamente, pues de lo contrario habría movimiento vertical.
 - La fuerza de rozamiento tiene sentido opuesto al movimiento del corredor.
 - Considera $F=ma$, donde F es el empuje del corredor.
- La aceleración se mantiene constante porque la fuerza de empuje es constante.
- Desconoce la condición de resbalamiento

Así mismo no emplea P3 y P4, ya que no considera la fuerza de rozamiento como reacción al empuje que impulsa al corredor y no expresa la condición de resbalamiento. Finalmente, estos aspectos lo conducen a una tesis incorrecta.

El caso de Elvira

En la Tabla 3 se presenta la configuración cognitiva inferida de las respuestas de la alumna Elvira (Figura 5), perteneciente al 17% de la población de estudiantes que resuelve el problema correctamente. Consideramos la respuesta correcta a pesar de que el diagrama muestra cuatro fuerzas porque la solución algebraica coincide con la que daría un experto.

En el diagrama, el corredor, después de ser representado por un ícono, se ha idealizado en un punto (implícitamente supone que el corredor se concentra en el punto que representa el punto de contacto del pie con la pista) y no se equivoca al asignar el sentido a la fuerza de rozamiento. Se puede interpretar que la expresión “ $E-F$ ” se refiere a que ambas fuerzas son iguales en magnitud y que no necesariamente está considerando que sean fuerzas vectoriales que se cancelen, aunque de la expresión $\sum F$ se podía interpretar que si lo hace.

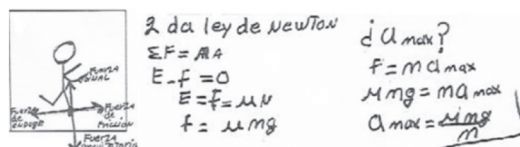


Figura 5. Diagrama de Elvira. Determina la aceleración máxima correctamente.

También se puede notar que la alumna conoce la condición de máxima aceleración. Esto la lleva a plantear la expresión algebraica de la segunda ley de Newton donde la fuerza de rozamiento es igual al

producto de la masa del corredor por su aceleración, lo cual es la solución del problema.

Tabla 3. Configuración cognitiva de Elvira.

SITUACIÓN PROBLEMA
Tarea del corredor
LENGUAJE
<p>–Representación diagramática en la que intervienen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Términos físicos</i>: las fuerzas normal, de empuje, gravitatoria y de fricción. • <i>Símbolos</i>: aceleración “A”, “a_{max}”, aceleración de la gravedad “g”, masa “m”, coeficiente de rozamiento “μ”, fuerza de empuje “E” y de fricción “f”. • <i>Representaciones gráficas</i>: del corredor como ícono y luego como punto, plano cartesiano y cuatro fuerzas mediante flechas (\rightarrow). <p>–<i>Expresiones algebraicas</i>: segunda ley de Newton $\Sigma F = mA$, fuerza de rozamiento $f = \mu N$, peso “mg” y aceleración máxima $a_{max} = \frac{\mu mg}{m}$.</p>
CONCEPTOS
<p>–<i>Físicos</i>: fuerza, fuerza de rozamiento, aceleración y máxima aceleración.</p> <p>–<i>Matemáticos</i>: vector, componentes de un vector, suma vectorial, escalar, sistema coordenado cartesiano.</p>
PROPIEDADES
<p>–Toma en cuenta las propiedades P1-P4 de manera adecuada: P1, considera un marco de referencia y el movimiento horizontal del corredor; P2, considera que la fuerza de rozamiento impulsa al corredor; P3, considera la fuerza de rozamiento como fuerza de reacción al empuje, y P4 considera la fuerza de rozamiento máxima $f_e = \mu_e N$.</p>
PROCEDIMIENTO
<p>–Transforma la representación icónica del corredor en un diagrama que consiste de un sistema de coordenadas y de vectores.</p> <p>–Emplea P1 para establecer el marco de referencia y que no hay movimiento vertical.</p> <p>–Emplea P3 al señalar que el rozamiento es una fuerza de reacción al empuje.</p> <p>–Emplea P4 y relaciona las fuerzas normal y de rozamiento mediante $f_e = \mu N = \mu mg$.</p> <p>–Calcula la aceleración mediante P2.</p>

ARGUMENTOS
<p>Tesis: la aceleración máxima es el producto del coeficiente de fricción por la aceleración de la gravedad ($a_{max} = \mu mg/m$).</p> <p>Razones:</p> <p>–La aplicación de las leyes de Newton permiten afirmar que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Las fuerzas: (a) peso y fuerza normal se cancelan mutuamente, y (b) la fuerza de fricción es una fuerza de reacción al empuje e impulsa al corredor. • La fuerza de rozamiento tiene el mismo sentido que el movimiento del corredor. • Cuando el corredor adquiere una aceleración máxima “a_{max}”, la fuerza de rozamiento es “$f = \mu N = \mu mg$”. • Se cumple que $\mu mg = ma_{max}$, de manera que $a_{max} = \mu g$. <p>–La aceleración es máxima cuando la fuerza de rozamiento es máxima.</p>

A continuación se presenta el último grupo de estudiantes de la clasificación que no realiza el proceso de idealización. Se trata del alumno Alberto, que no resuelve la tarea de manera adecuada, pero cuya representación de la situación física da cuenta de la manera en la que considera la maximización de la aceleración del corredor.

(ii) Maximización de la aceleración

En este apartado se describe el caso del alumno Alberto, el cual no realiza el proceso de idealización y no resuelve correctamente el problema.

El caso de Alberto

Alberto también pertenece al 70% de los estudiantes que argumentaron que la fuerza de empuje del corredor se mantenía constante durante el movimiento (pregunta 8, Figura 2), y también al 63% que señalaron la relación entre la fuerza de fricción y el peso del corredor, pregunta 11. Por cuestiones de espacio se presenta su producción sin la configuración cognitiva correspondiente.

En su diagrama (Figura 6) puede notarse la representación de algunas fuerzas mediante flechas y símbolos que las acompañan (la fuerza normal N , el peso del corredor F_g y rozamiento F_{Fric}), sin embargo, en lugar de representar la fuerza de empuje que el corredor ejerce sobre la pista, representó la aceleración.

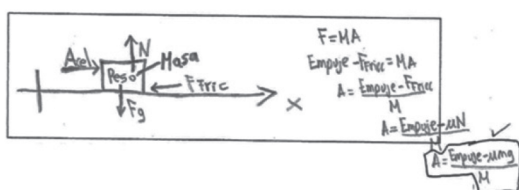


Figura 6. Diagrama de Alberto. Idealiza el corredor como una caja.

Asimismo, notamos que representa al corredor mediante un bloque en lugar de un punto (realiza un proceso de esquematización como Luis citado anteriormente, pero, a diferencia de éste, no llega a realizar el proceso de idealización que lo lleve a concentrar el corredor en un punto).

Asimismo, el alumno dibujó un sistema coordenado, el cual utilizó para representar que la fuerza normal cancela al peso del corredor, y concluir que el movimiento se lleva a cabo de manera horizontal al dibujar el eje de la abscisa más largo que el eje ordenado.

Con base en la configuración cognitiva de Alberto, se infiere que la representación del corredor como un bloque tiene relación con el sentido y la magnitud constante que el estudiante atribuye a la fuerza de rozamiento.

Esto podría explicar la consideración del rozamiento como una fuerza que dificulta el movimiento del corredor (sentido opuesto) y también el papel que juega en la expresión de la máxima aceleración "A". Así mismo, la consideración de la fuerza que acelera al corredor como la resultante de la suma de la fuerza de empuje y la fuerza de rozamiento (ambas constantes) podría explicar también por qué el estudiante no considera la condición de resbalamiento del corredor. Es decir, el alumno sí expresa la fuerza de rozamiento mediante $f = \mu N$ sin embargo no considera el cambio en la magnitud de la fuerza de rozamiento estática en el desarrollo del movimiento.

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes no considera la condición para que el corredor obtenga aceleración máxima. Dicha condición señala que la fuerza de empuje y la de fricción se incrementan y se cancelan mutuamente

durante el movimiento hasta que la fuerza de fricción es proporcional al peso del corredor, sin embargo, la mayoría de los estudiantes supone constante a la fuerza de empuje, por lo cual, sólo algunos estudiantes señalaron una relación entre la fuerza de empuje y la aceleración. Cabe destacar que la mayoría de los estudiantes no sugirió una relación entre la fuerza de fricción y la velocidad.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes también asigna un sentido erróneo a la fuerza de fricción al suponerla contraria al movimiento del corredor y como aquella que dificulta su movimiento (como en el caso del estudiante Alberto presentado anteriormente).

Una de las causas de sus conjeturas erróneas sobre (1) el sentido y (2) el incremento de la magnitud de la fuerza de rozamiento estática hasta un valor máximo, es el uso de diagramas en los que el corredor se representa como una caja que se mueve sobre una superficie; lo cual lleva a considerar (a) que la fuerza de rozamiento obstaculiza el movimiento del corredor y a (b) atribuir al corredor un movimiento con aceleración constante. Este resultado es concordante con las investigaciones de [1] y [6] que señalan las dificultades que fomentan los libros de texto que utilizan este tipo de representación.

En segundo lugar, el análisis de las representaciones diagramáticas elaboradas por los estudiantes pone de manifiesto la importancia del proceso de idealización, que lleva en un primer momento a representar al corredor de manera icónica y después como un punto al cual se le atribuye la masa del corredor y sobre el cual se aplican todas las fuerzas. Según los resultados del cuestionario, el proceso de idealización es una condición necesaria pero no suficiente para la solución correcta del problema.

No basta considerar al corredor como un punto, sino que también es necesario asignar un sentido adecuado a las fuerzas que intervienen en la situación física (por ejemplo, en el caso de la fuerza de rozamiento, Luis lleva a cabo el proceso de idealización pero no le asigna un sentido adecuado). El papel relevante de este proceso por una parte y el uso de representaciones prototípicas en forma de bloque en muchos libros, por otra, es una de las explicaciones de las dificultades que tienen muchos

alumnos a la hora de resolver problemas de fuerza de rozamiento.

Se trata de una explicación del fenómeno documentado en [15], los cuales señalan que los estudiantes avanzados del profesorado tienen dificultades para identificar el punto de aplicación de la fuerza de rozamiento.

También el hecho de idealizar a los cuerpos como bloques y no como partículas podría ser una explicación de los análisis de [5], donde se observó que, respecto del rodamiento de los cuerpos, los estudiantes emplean los mismos razonamientos para partículas que para cuerpos rígidos, lo cual les lleva a errores al asignar la dirección de la fuerza de rozamiento.

El desconocimiento de la importancia del empleo de las leyes de Newton o de la ley empírica de fricción (P4 en la Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3) en la solución de la tarea del corredor, y en general de cualquier otra tarea en el contexto de la mecánica, es lo que podría explicar que los alumnos no terminen de dar sentido a la solución del problema y tengan dificultades para explicar su respuesta. Dichas dificultades se observan en las respuestas a los ítems 8-15 del cuestionario.

Por último, con base en las observaciones anteriores y con el hecho de que la mayoría de los autores de los libros de texto presentan la fuerza de rozamiento mediante situaciones prototípicas como el del bloque que desliza sobre una rampa [1, 6], concluimos que, para mejorar la enseñanza de la fuerza de rozamiento, es importante profundizar más en las situaciones cotidianas que se utilizan como contextos para estudiar la fuerza de rozamiento, puesto que a pesar de ser familiares al alumno, hay casos en los que éste no tiene claro el sentido de la fuerza de rozamiento (como sucede en el problema del corredor).

REFERENCIAS

- [1] M. Arcodía y S. Islas. "Las fuerzas de roce en libros de texto y en revistas científicas". *Revista de Enseñanza de la Física*. Vol. 19 N° 2, pp. 7-24. Enero, 2011. ISSN: 2250-6101. Fecha de Consulta: 15 de marzo de 2013. URL: <http://www.fceia.unr.edu.ar/fceia/ojs/index.php/revista/article/view/52/pdf>
- [2] E. Badillo, V. Font y C. Azcárate. "Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemáticas del bachillerato". *Enseñanza de las Ciencias*, Número Extra, VII Congreso, pp. 1-6. Septiembre de 2005. ISSN: 0212-4521. Fecha de Consulta: 7 de abril 2014. URL: http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/BadilloFontAzcarateEC.pdf
- [3] U. Besson, L. Borghi, A. de Ambrosis and P. Mascheretti. "How to teach friction: Experiments and models". *American Journal of Physics*. Vol. 75, Issue 12, pp. 1106-1113. December, 2007. ISSN: 0002-9505 DOI: 10.1119/1.2779881.
- [4] J. Campanario. "De la necesidad, virtud: cómo aprovechar los errores y las imprecisiones de los libros de texto para enseñar física". *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. Vol. 21 N° 1, pp. 161-172. Marzo 2003. ISSN: 0212-4521. Fecha de consulta: 29 de abril 2013. URL: <http://www2.uah.es/jmc/an32.pdf>
- [5] P. Carvalho and A. e Sousa. "Rotation in secondary school: teaching the effects of frictional force". *Physics Education*. Vol. 40, Issue 3, pp. 257-265. May, 2005. ISSN: 1361-6552. DOI:10.1088/0031-9120/40/3/007
- [6] S. Concari, R. Pozzo y S. Giorgi. "Un Estudio sobre el Rozamiento en Libros de Física de Nivel Universitario". *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. Vol. 17 N° 2, pp. 273-280. Julio de 1999. ISSN: 0212-4521. Fecha de Consulta: 25 de febrero de 2013. URL: <http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v17n2p273.pdf>
- [7] C. Escudero, S. González y E. Jaime. "El análisis de conceptos básicos de física en la resolución de problemas como fuente generadora de nuevas perspectivas. Un estudio en dinámica del movimiento curricular". *Revista Educación y Pedagogía*. Vol. 17 N° 43, pp. 63-78. Diciembre 2005. ISSN: 01217593. Fecha de Consulta: 5 de mayo de 2013. URL: <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyep/article/view/6054/5460>
- [8] T. Fagúndez. "Análisis del discurso en clases de física universitaria. Implicaciones para la

- mejora de la práctica docente”. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona. Barcelona, España. 2006.
- [9] V. Font and Á. Contreras. “The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education”. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 69, Issue 1, pp. 33-52. September, 2008. ISSN: 0013-1954 DOI: 10.1007/s10649-008-9123-7.
- [10] V. Font, N. Planas y J. Godino. “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*. Vol. 33, Issue 1, pp. 89-105. January, 2010. ISSN: 0210-3702. DOI: 10.1174/021037010790317243
- [11] J. Godino, C. Batanero and V. Font. “The ontosemiotic approach to research in mathematics education”. *The International Journal on Mathematics Education*. Vol. 39, Issue 1-2, pp. 127-135. March, 2007. ISSN: 1863-9704. DOI: 10.1007/s11858-006-0004-1.
- [12] J. Godino, J. Cajaraville, T. Fernández y M. Gonzato. “Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática”. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 30 N° 2, pp. 109-130. Junio 2012. ISSN: 0212-4521. Fecha de Consulta: 8 de abril 2014 URL: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/visualizacion_seg%FAn_EOS.pdf
- [13] S. Ha, G. Lee and C. Kalman. “Workshop on friction: Understanding and Addressing Students’ Difficulties in Learning Science Through a Hermeneutical Perspective”. *Science and Education*. Vol. 22, Issue 6, pp. 1423-1441. June, 2013. ISSN: 1573-1901 DOI: 10.1007/s11191-012-9465-5.
- [14] I. Halloun and D. Hestenes. “Common sense concepts about motion”. *American Journal of Physics*. Vol. 53, Issue 11, pp. 1056-1065. November, 1985. ISSN: 00029505. DOI: 10.1119/1.14031.
- [15] S. Islas y V. Guridi. “Exploración sobre fuerzas de roce y su tratamiento didáctico”. Tercer Simposio de Investigadores en Educación en Física. La Falda, Argentina. 1996.
- [16] R. Johnson and A. Onwuegbuzie. “Mixed methods research: a research paradigm whose time has come”. *Educational Researcher*. Vol. 33, Issue 7, pp. 14-26. October, 2004. ISSN: 0013-189X. DOI:10.3102/0013189X033007014.
- [17] A. Jardón, B. Milicic, P. Fernández y G. Utges. “Configuraciones epistémicas en el análisis del trabajo de la fuerza de roce”. *Actas de la XVI Reunión Nacional de Educación en la Física*. Universidad Nacional de San Juan. San Juan, Argentina. Octubre 2009.
- [18] J. Krim. “Resource Letter: FMMLS -: Friction at macroscopic and microscopic length scales”. *American Journal of Physics*. Vol. 70, Issue 9. pp. 890-897. September, 2002. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.1484153.
- [19] U. Malaspina. “Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 10 N° 3, pp. 365-399. Noviembre, 2007. ISSN: 1665-2436. Fecha de Consulta: 8 de abril 2014. URL: <http://www.redalyc.org/pdf/335/33500304.pdf>
- [20] U. Malaspina and V. Font. “The role of intuition in the solving of optimization problems”. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 75, Issue 1, pp. 107-130. September, 2010. ISSN: 1573-0816. DOI: 10.1007/s10649-010-9243-8.
- [21] C. Mora y D. Herrera. “Una revisión sobre ideas previas del concepto de fuerza”. *Latin-American Journal of Physics Education*. Vol. 3 N° 1, pp. 72-86. Enero 2009. ISSN: 1870-9095. 2009. Fecha de Consulta: 5 de mayo 2013. URL: <http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/10737>
- [22] R. Resnick, D. Halliday y S. Krane. “Física”. Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V., Edición 3. Vol. 1, pp.118-123 y 139. México, D. F. ISBN: 968-26-1230-6. 1999.
- [23] E. Saltiel. “Raisonnements des étudiants sur le frottement cinétique: l’entraînement”. II Simposio de Investigación en Educación en Física (SIEF II). Buenos Aires, Argentina. 1994.
- [24] I. Yamamoto e V. Barbata. “Simulações de Experiências como Ferramenta de Demonstração Virtual em Aulas de Teoria de Física”. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. Vol. 23 N° 2, pp. 215-225. Junio de 2001. ISSN: 1806-1117. Fecha de Consulta: 21 de febrero de 2014. URL: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v23_215.pdf

- [25] G. Zalamea y E. París. “¿Saben los maestros la física que enseñan?”. Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas. Vol. 7 Nº 3. pp. 251-256. Noviembre de 1989. ISSN:0212-452. Fecha de Consulta: 29 de abril de 2013. URL: <http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51271/93016>
- [26] J. Gómez, V. Marquina and R. Gómez. “On the performance of Usain Bolt in the 100 m sprint”. European Journal of Physics. Vol. 34, Issue 5, pp. 1227-1233. July, 2013. DOI: 10.1088/0143-0807/34/5/1227.
- [27] F.D. Rivera. “Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues”. Springer. Dordrecht Heidelberg London. New York. 2011.

ANEXO

A continuación se presentan de manera sucinta las 17 preguntas del cuestionario:

- 1) Elabore un dibujo de las fuerzas que actúan sobre el corredor en las posiciones A, B y C de la Figura 1.
- 2) ¿Qué fuerzas actúan sobre el corredor en A?
- 3) ¿Qué fuerzas actúan sobre el corredor en B?
- 4) ¿Qué fuerzas actúan sobre el corredor en C?
- 5) ¿Cuál es el papel que juega la fuerza de fricción en el problema?
- 6) ¿Cuál es la dirección de las fuerzas que actúan sobre el corredor en A?
- 7) ¿Cuál es la dirección de las fuerzas que actúan sobre el corredor en C?
- 8) ¿Cuál es la relación entre la fuerza de empuje y la aceleración del corredor?
- 9) ¿Qué condición se debe cumplir para que el corredor pueda acelerarse al máximo?
- 10) ¿Qué condición implica que el corredor se resbale sobre la pista?
- 11) ¿Cuál es la relación entre la fuerza de fricción y el peso del corredor?
- 12) ¿Tiene sentido hablar de fuerza de reacción a la fuerza de empuje del corredor?
- 13) ¿Cuál es el papel que juega la fuerza de reacción a la fuerza de empuje del corredor?
- 14) ¿Qué relación hay entre la fricción y la fuerza de reacción a la fuerza de empuje?
- 15) ¿La fuerza de empuje del corredor se mantiene constante en A, B y C?
- 16) Tomando en cuenta sus respuestas anteriores, resuelva el problema del corredor:
- 17) ¿En dónde está situado el marco de referencia en la solución del problema?