

Revista Iberoamericana de Educación

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura

rie@oei.es

ISSN (Versión impresa): 1022-6508-X

ISSN (Versión en línea): 1681-5653

ESPAÑA

2007

Flavia Terigi / Susana Wolman

SISTEMA DE NUMERACIÓN: CONSIDERACIONES ACERCA DE SU ENSEÑANZA

Revista Iberoamericana de Educación, enero-abril, número 043

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura

Madrid, España

pp. 59-83

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Universidad Autónoma del Estado de México

<http://redalyc.uaemex.mx>



SISTEMA DE NUMERACIÓN: CONSIDERACIONES ACERCA DE SU ENSEÑANZA¹

Flavia Terigi *

Susana Wolman **

SÍNTESIS: La enseñanza de la matemática ocupa un lugar estratégico en la trayectoria escolar diseñada por los currículos de todos los países. En el inicio de la formación matemática escolar, el sistema de numeración es el elemento clave. Este artículo analiza las maneras en que la enseñanza usual del sistema de numeración puede estar contribuyendo a la producción de fracaso escolar, y considera las condiciones que deben reunir las propuestas de enseñanza a fin de colocar a los niños en una posición de creciente dominio en esta herramienta cultural.

SÍNTESE: O ensino da matemática ocupa um lugar estratégico na trajetória escolar projetada por currículos de todos os países. No início da formação matemática escolar, o sistema de numeração é o elemento-chave. Este artigo analisa a maneira como o ensino usual do sistema de numeração poderá estar contribuindo para a produção de fracasso escolar, e considera as condições que devem reunir as diversas propostas de ensino, a fim de colocar a criança em uma posição de crescente domínio desta ferramenta cultural.

59

¹ Desde hace muchos años se desarrolla en la Universidad de Buenos Aires un programa de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración que ha tocado diferentes aspectos de este objeto en sucesivos períodos de trabajo. Históricamente dirigido por Delia Lerner, hoyes el Proyecto 2004-2007 X152: «El sistema de numeración: conceptualizaciones infantiles sobre la notación numérica para números naturales y decimales», dirigido por las autoras de este artículo. Aunque el mismo no es un informe de investigación, sus consideraciones encuentran fundamento en los desarrollos teóricos que el equipo de investigación lleva acumulados a lo largo de estos años.

* Profesora de la Universidad de Buenos Aires y de la Universidad Nacional de General Sarmiento. Docente de posgrado de las universidades de Buenos Aires, nacional de Córdoba, nacional de Entre Ríos y Torcuato Di Tella, Argentina.

** Docente de Psicología y Epistemología Genética de la Facultad de Psicología de la UBA. Docente de Psicología Genética de la carrera de Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Letras de la UBA. Coordinadora del área de Educación Primaria de la Dirección de Currículos de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

ABSTRACT: *Instruction in mathematics plays a strategic role in courses of study designed by all countries' curricula. During the early phases of mathematics training, the number system is the key item. This paper analyzes the different ways in which common number system teaching could be contributing to school failure, and takes into consideration the characteristics that teaching proposals ought to possess in order to put children in a position of growing mastery of this cultural tool.*

1. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN EN LAS TRAYECTORIAS FORMATIVAS DE LOS SISTEMAS ESCOLARES

Retrospectivamente, la segunda mitad del siglo XX fue un período excepcionalmente notable en cuanto al crecimiento de la escolarización de masas (Benavot, 2002; Esteve, 2006). Pero ese crecimiento convive con la evidencia de resultados socialmente desiguales, un hecho firmemente establecido en todas partes en el mundo (Connell, 1993; Rodríguez, 2002). Las investigaciones de los especialistas y los análisis de los organismos de cooperación señalan tanto las dificultades persistentes de los sectores pobres para ingresar y permanecer en el sistema, como las diferencias en los aprendizajes a los que pueden acceder.

60

La situación educativa en América Latina no escapa a estas consideraciones. El análisis realizado por SITEAL² permite constatar que se ha producido un aumento de los años de estudio de los jóvenes entre 18 y 24 años, pero que ese incremento no ha favorecido más a los provenientes de hogares de menor nivel socio-económico sino que, por el contrario, el aumento se muestra dependiente del nivel educativo alcanzado por los adultos, de modo que se verifica la persistencia del proceso de transmisión intergeneracional de las desigualdades educativas (SITEAL, a). Aunque los datos muestran avances importantes de los países de la región en el acceso de la población infantil a la enseñanza

² SITEAL es la sigla de Sistemas de Información de Tendencias Educativas en América Latina, un programa que desarrollan en forma conjunta el Instituto Internacional de Planeamiento de la Educación - Buenos Aires (IIPE-UNESCO, Sede Regional Buenos Aires) y la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). Este programa comenzó a funcionar a comienzos del año 2003 y está orientado a analizar la inequidad en el acceso y en los logros educativos de la población, así como el impacto de la educación en la calidad de vida de las familias y en la dinámica social. Para acceder a las producciones de SITEAL: <http://www.siteal.iipe-oei.org>

TABLA 1
Porcentaje de alumnos de 9 a 11 años con dos o más años de atraso
en la primaria en países de América Latina, años 2000-2001
(según fechas de mediciones nacionales)

País	Año	Porcentaje
Argentina	2000	7,7
Bolivia	2000	21,2
Brasil	2001	18,0
Chile	2000	9,2
Guatemala	2001	33,5
Honduras	2001	16,8
México	2000	9,3
Nicaragua	2001	23,6
Paraguay	2000	58,0 (*)
Perú	2000	18,0
Uruguay	2001	11,9

(*) Cifra sin confirmación en la fuente.

FUENTE: adaptación de SITEAL (b), *Resumen estadístico 1. Totales nacionales*, cuadro 9.

primaria³, también reflejan su dificultad para permanecer en el sistema y avanzar en su escolaridad; son importantes las cantidades de niños que, a poco de iniciar su escolaridad, ya se encuentran en situación de rezago educativo (ver tabla 1), y son muy elevados (con picos del 47,4%) los porcentajes de la población de 15 años o más que no ha logrado completar la escuela primaria (ver tabla 2).

³ Países con un importante rezago educativo lograron progresos espectaculares en la escolarización de la población de 6 a 8 años: Brasil, por ejemplo, elevó la tasa de escolarización de ese grupo de edad de 75,4% en 1991 a 93,1% en el año 2001; Costa Rica la elevó de 78,6% en 1991 a 94,9% en 2000. Los países donde la escolarización primaria había alcanzado mejores niveles de cobertura también avanzaron, lógicamente a un ritmo menor; así, Chile pasó de 94,3% de tasa escolarización de su población de 6 a 8 años en 1990 a 97,9% en 2000, y México pasó de 90,9% en 2002 a 96,0% en 2000 (SITEAL, b, cuadro 2).

TABLA 2
Porcentaje de población de 15 años y más con nivel educativo hasta
primario incompleto en países de América Latina, años 2000-2001
(según fechas de mediciones nacionales)

País	Año	Porcentaje
Argentina	2000	4,0
Bolivia	2001	22,9
Brasil	2000	44,7
Chile	2001	10,0
Guatemala	2001	47,4
Honduras	2001	29,3
México	2000	10,0
Nicaragua	2001	35,7
Paraguay	2000	19,2
Perú	2000	10,9
Uruguay	2001	3,3

FUENTE: adaptación de SITEAL (b), *Resumen estadístico 1. Totales nacionales*, cuadro 23.

¿Por qué iniciar un artículo sobre la enseñanza del sistema de numeración con referencias al fracaso escolar? Porque la enseñanza de la matemática (junto con la de la lengua) ocupa un lugar estratégico en la trayectoria escolar diseñada por los currículos de todos los países. En efecto, el peso de esta materia en el proyecto formativo que sostiene la escuela es enorme, tanto por su inclusión universal en el currículo (véase la tabla 3) como por su participación en la carga horaria semanal: según datos aportados recientemente por Benavot, a la matemática se le asigna como promedio cerca de la quinta parte del total de horas lectivas de la escuela primaria (véase Benavot, 2002, cuadro 4). La centralidad de esta asignatura en el diagnóstico del estado de la educación se manifiesta en el hecho de que los sistemas nacionales de evaluación de la calidad educativa que diversos países han establecido recientemente, se restringen habitualmente a ella y al área de lengua como disciplinas centrales del currículo (Terigi, 1999).

TABLA 3
Porcentaje de países del mundo entero que exigen la enseñanza de
asignaturas del plan de estudios en el nivel de la escuela primaria
(cursos 1-6), 1920-1986, según asignatura.

Asignatura	Período histórico		
	1920/1945 (n = 43/48)	1946/1969 (n = 73/82)	1970/1986 (n = 73/82)
Lengua (nacional y extranjera)	100	100	100
Matemática	100	100	100
Ciencias Naturales	81	92	100
Ciencias Sociales (de todo tipo)	98	96	100
Formación estética	86	97	99
Educación física	89	97	96
Higiene / Educación para la salud	35	38	42
Asignaturas prácticas / Formación profesional	86	72	68

n = número de países.

FUENTE: adaptado de Benavot, 2002, cuadro n.º 4.

La exclusión de niños y adolescentes de los servicios educativos, así como el fracaso de muchos de quienes logran ingresar al sistema escolar, suscitan desde hace lustros esfuerzos importantes de los países para desarrollar políticas que mejoren la capacidad incluyente de las escuelas. El fracaso escolar provoca la necesidad de un análisis de la enseñanza habitual que permita comprender mejor los factores productivos que puedan estar operando en las situaciones de enseñanza⁴. En el aprendizaje de la matemática, «muchos estudiantes *muestran* que no

⁴ Considerar el fracaso escolar como fenómeno educativo no implica desconocer las relaciones que existen entre procesos y condiciones del entorno social y fracaso escolar; implica no renunciar a explicar «[...] de qué manera, bajo qué condiciones, por medio de qué mecanismos, **específicamente pedagógicos**, se produce dentro de las escuelas el fracaso de los niños» (Terigi y Baquero, 1997, p. 108, original en portugués, negrita en el texto fuente).

pueden, que no tienen interés, que no quieren [...]. Pero este estado de cosas, que se ha vuelto *natural*, ha sido provocado por muchísimos factores **entre los cuales** interviene la *naturaleza* del proyecto educativo, condicionado no sólo por los factores sociales sino también por una cierta visión de los modos en que circula el conocimiento dentro de las clases. Revisar la matemática que vive en la escuela, interrogarla, analizarla, es imprescindible para concebir otros escenarios» (Sadovsky, 2005, p. 13, cursiva y negrita en el texto fuente).

Este artículo se propone aportar al esfuerzo por entender los procesos sociales y educativos que confluyen en la producción del fracaso escolar, centrándose de manera específica en analizar de qué manera la enseñanza usual del sistema de numeración puede estar contribuyendo a la producción de fracaso, y mostrando cómo es posible, bajo ciertas condiciones, generar propuestas de enseñanza que coloquen a los niños en una posición de creciente dominio de esta herramienta cultural, base para los aprendizajes de los conocimientos matemáticos en la escuela.

La elección del objeto, el sistema de numeración (en adelante, SN), no es casual. En el inicio de la formación matemática escolar, cuando niños y niñas se incorporan a la educación básica o primaria, el SN es el elemento clave. Según Nunes Carraher y Bryant (1998), el desarrollo del conocimiento y la comprensión matemáticos implica para los niños tres aspectos: aprender las invariantes lógicas, aprender a dominar y utilizar los sistemas matemáticos convencionales y aprender a ver los requerimientos matemáticos de diferentes situaciones. El SN es el primer sistema matemático convencional con que se enfrentan los niños en la escuela, y constituye el instrumento de mediación de otros aprendizajes matemáticos, «el aspecto de la notación matemática más fundamental (el álgebra, por ejemplo, es más compleja y presupone el conocimiento del sistema numérico)» (Martí, 2003, p. 164). En consecuencia, la calidad de los aprendizajes que los niños puedan lograr en relación con este objeto cultural es decisiva para su trayectoria escolar posterior.

En este sentido, nos interesa poner a consideración de los lectores que la enseñanza escolar de la matemática puede ser injusta no sólo con quienes no logran aprender los contenidos curriculares, sino también con quienes triunfan en la escuela y logran avanzar con regularidad en su escolaridad. Esto es así cuando los contenidos curriculares o la propia enseñanza no incorporan a los alumnos al *mundo de relaciones* que constituye la matemática. Si, como sostiene Rodd, la naturaleza de

las justificaciones por las que un alumno otorga validez a una proposición matemática es un aspecto central para determinar si posee en verdad conocimiento matemático (Rodd, 2000); si, como sostiene Sadovsky, la actividad matemática es una actividad de modelización por medio de la cual los alumnos aprenden a actuar sobre la realidad valiéndose de un aparato teórico (Sadovsky, 2005), una enseñanza que no trabaje sobre la formulación de razones, o que reduzca la actividad matemática a «aplicar una operación», comprometerá las posibilidades de los alumnos de adquirir dominio sobre el saber matemático, de apropiarse del conocimiento construido y de afirmarse a sí mismo como aprendiz de una cultura. En el campo del SN, limitar el trabajo didáctico a unos pocos números de la serie presentándolos de uno en uno sin avanzar hasta que no se domine el nombre y el correcto trazado de cada uno, o mostrar un único modo –el convencional– de resolver las operaciones, hace imposible que los niños accedan al mundo de relaciones que supone la notación numérica, y pone en riesgo no sólo sus aprendizajes sobre el SN sino sus posibilidades futuras de apropiación de nuevos conocimientos matemáticos.

2. ACERCA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN COMO OBJETO

65

La pregunta por la enseñanza de la numeración escrita requiere «desnaturalizar» nuestro saber adulto sobre ella. En efecto, los adultos, usuarios habituales del SN, tendemos a pensar en él como una técnica de traducción de las cantidades a una forma gráfica, y solemos creer que para su conocimiento alcanza con conocer la regla que rige esta traducción. Este modo de entender al SN oscurece la comprensión de los problemas involucrados en el aprendizaje de este objeto y, desde luego, en su enseñanza. A lo largo de este trabajo, propondremos a los lectores otras perspectivas sobre el SN que permitirán problematizar la manera en que se desarrolla usualmente su enseñanza. En este apartado nos centraremos en dos perspectivas de análisis del SN: en cuanto objeto matemático, y en cuanto instrumento cultural disponible en la cultura.

En cuanto objeto matemático, el SN no es un artilugio de mera traducción de cantidades en formas gráficas, sino un sistema de representación de las cantidades. La construcción de cualquier sistema de representación involucra un proceso de diferenciación de los elementos y relaciones reconocidos en el objeto a ser representado (en nuestro caso, en las cantidades y en el proceso de cuantificación) y una selección de

aquellos elementos y relaciones que serán retenidos en la representación (en nuestro caso, las reglas del SN)⁵. Para poder representar las cantidades, el sistema de numeración posee ciertas reglas que permiten organizar la cuantificación para hacerla económica, y estas reglas, lejos de ser «naturales», son producto de la elaboración histórica de ciertas convenciones.

La elaboración histórica del SN puede entenderse como una búsqueda sostenida de economía en la representación, que ha desembocado en la elaboración de un sistema por el cual con un pequeño número de símbolos es posible representar infinidad de cosas y realizar complejas operaciones. En orden a esta economía de la representación, quienes han rastreado la génesis del sistema de numeración en la historia humana consideran que tres han sido las innovaciones más poderosas (Guitel, 1975; Ifrah, 1987):

- La utilización de agrupamientos, que permitió superar la mera notación por correspondencia uno-a-uno, que es sólo la traducción de una enumeración que anuncia un grupo de objetos sin implicar para ello el desarrollo de la noción de cuantificación. La idea de agrupar las cantidades constituyó un primer paso en la economía de la representación.
- La utilización del principio de la base, que convirtió los agrupamientos en regulares. Este principio permitió superar la dificultad de tener que recordar, para comprender cada nivel de agrupamiento, el principio de agrupamiento utilizado. Los sistemas de base son sistemas de agrupamientos regulares, donde el número de elementos que se agrupa es igual al número de símbolos utilizados en la escritura.
- El valor posicional de las cifras: esta creación ha sido el principio fundamental para la economía en la notación numérica, en tanto permitió eliminar en la escritura la representación de los exponentes de las potencias de la base. Cuando, con nuestro sistema posicional de base diez, escribimos 4627, estamos diciendo:

$$(4 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (7 \times 10^0)$$

⁵La conceptualización de los sistemas de representación está desarrollada en Ferreiro (1986).

Pero al escribir posicionalmente, evitamos escribir los exponentes de las potencias de la base (3, 2, 1, 0), sobreentendidos en la posición otorgada a cada coeficiente (4, 6, 2, 7).

Todo esto está presente en algo tan simple como el número «50» que puede figurar en un billete al que los niños tienen acceso, o como el precio de \$179 que ven en un electrodoméstico que se exhibe en el anaquel de un supermercado. Pero, junto con estos números, los niños ven otros (como el 179 de un ómnibus o el 49253442 de un teléfono), donde los numerales no cumplen las mismas funciones de representación que en los casos del billete o el precio. Esto nos coloca frente a una segunda dimensión de análisis del sistema de numeración, como instrumento de uso social: esto es, en cuanto objeto que está presente en la vida cotidiana de todos nosotros –también de los niños–, ofreciendo informaciones muy diversas, de acuerdo con sus diferentes contextos de utilización (Sinclair y Sinclair, 1984).

Desde el punto de vista infantil, el sistema de numeración ofrece numerosas oportunidades de interacción, porque es un objeto cultural que tiene la particularidad de estar sumamente presente en el mundo social. Para corroborarlo basta con pensar en algunas de las situaciones cotidianas en las que aparecen numerales: en los casos ya citados del dinero, los ómnibus, los precios y los teléfonos, pero también en el modo de señalar las fechas, en avisos de pago de servicios y recibos de cobro; en la identificación de las casas y los automóviles; en los relojes, las páginas de los libros y revistas, los talles de la ropa, las medidas del calzado, la documentación de las personas, las indicaciones de contenido y precio de las mercaderías, el control remoto de la televisión, etcétera.

Pero ocurre que, en muchos de los casos que hemos mencionado, los números no funcionan como lo hacen en el sistema de numeración, sino con reglas específicas de la situación en cuestión. Así, por ejemplo, si en el SN cifras distintas representan cantidades diferentes, hay usos de los grafismos numéricos en que cifras diferentes no representan cantidades diferentes, sino clases cuyas diferencias son cualitativas: lo que indica el 179 de un colectivo con respecto al 21 de otro no es una cantidad mayor (colectivos más grandes, mayor número de colectivos, etc.), sino que ese colectivo realiza un recorrido diferente al otro, el numeral funciona aquí como una etiqueta. Por lo tanto, las reglas construidas históricamente para representar variaciones en la cantidad no estarán funcionando en estos usos diferentes (Terigi, 1992).

La consideración del SN como instrumento social implica que el análisis de este objeto que se requiere para diseñar su enseñanza no se agota en el conocimiento de sus aspectos matemáticos; requiere poner en juego otros saberes que no son los del especialista en el campo matemático. En la dimensión de análisis en que nos estamos moviendo, se requiere un análisis de las prácticas sociales que involucran la numeración escrita y de los intercambios que tienen lugar a propósito de esas prácticas. Ese análisis nos pone frente a la posibilidad de comprender la clase de problemas que tiene que resolver un niño para llegar a comprender la naturaleza y funcionamiento del SN como objeto matemático, apoyándose en la información sobre él con la que cuenta a través de los usos muy diversos que se dan a la numeración escrita en su entorno social. Puede decirse que el uso de los números en el medio social es diverso y poco «respetuoso» de las características del sistema como objeto matemático; pero son precisamente estos usos los que ponen a los niños tempranamente en contacto con la numeración escrita.

3. LAS CONCEPTUALIZACIONES INFANTILES SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN

68

Desde hace tiempo, la literatura internacional viene reportando resultados de investigaciones sobre los procesos por medio de los cuales los niños construyen conocimientos acerca del SN, este objeto de conocimiento que es, a la vez, una herramienta presente en la vida social y un contenido curricular principal de la enseñanza escolarizada.

Las investigaciones han avanzado desde los primeros estudios centrados en la representación gráfica de cantidades inferiores a diez (Sastre y Moreno, 1976; Hughes, 1986; Sinclair, Siegrist y Sinclair, 1983) y en la diferenciación de notaciones numéricas y alfabéticas (Pontecorvo, 1985) a los estudios que focalizan en la producción, la interpretación o la comparación de notaciones representativas de números mayores, en las que intervienen las reglas que rigen el sistema posicional (Sinclair y otros, 1994, replicada en nuestro medio por Scheuer y otros, 1996, 2000; Seron y otros, 1995; Nunes Carraher, 1989; Higino da Silva, 1990; Seron y otros, 1991; Martínez Ruiz y Tolchinsky Landsmann, 1993). Entre estas últimas, algunas se ocupan sólo de la producción y otras sólo de la interpretación-comparación entre escrituras convencionales, en tanto que otras (Terigi, 1992; Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994) interrelacionan los dos aspectos.

Mucho más recientemente se han desarrollado investigaciones destinadas a estudiar las producciones numéricas en niños más pequeños (Alvarado y Ferreiro, 2000; Alvarado 2002; Brizuela 1997, 2001). Alvarado estudia la adquisición del sistema gráfico alfabético y numérico y presenta las razones que conducen a niños de 4 y 5 años a emplear variantes gráficas originales al escribir al dictado números de dos cifras: rotaciones o el empleo de números «comodines». Brizuela, por su parte, aborda las ideas infantiles sobre los números escritos y también encuentra el uso de «comodines» para los elementos de los números que los niños no conocen. Ambas investigaciones documentan la vinculación de la producción numérica de los niños con las pistas lingüísticas que ofrecen las designaciones orales de los numerales y señalan que la mayoría de los niños escriben los números de dos dígitos con dos dígitos, si bien Alvarado aclara que la producción de números bidígitos con dos cifras se presenta en niños con poco conocimiento de los nudos escritos.

Los estudios citados coinciden en evidenciar la elaboración temprana por parte de los niños de conceptualizaciones originales sobre el SN, entre las cuales se destacan la construcción de criterios de comparación de números y la producción de notaciones numéricas basadas en la correspondencia con la numeración hablada. Se ha establecido igualmente (Lerner y otros, *op. cit.*) que la escritura de los nudos –de los números «redondos»– constituye un punto de apoyo para la apropiación de otras notaciones, que los niños enfrentan conflictos como producto de la elaboración simultánea de reglas basadas en la posicionalidad (criterios de comparación) y en la correspondencia con la numeración hablada, y que el esfuerzo por superar estos conflictos permite avanzar hacia la escritura convencional.

Hace más de una década que la investigación ha hecho evidente que se requieren situaciones específicas para que ciertos aspectos conceptuales del SN se pongan en juego (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994), por lo cual los estudios que procuraron avanzar en la comprensión de los procesos cognoscitivos ligados a la construcción del sistema de numeración han comenzado a ubicarse en el contexto de la enseñanza escolarizada. Pese a ello, las investigaciones sobre la enseñanza del SN son aún escasas, pudiendo citarse, además del trabajo referido, los de Bednarz y Janvier (1992), Bednarz (1991), DeBlois (1996) y Lerner (2005). En nuestro caso, la investigación didáctica ha permitido estudiar la relación entre el aprendizaje de las operaciones aritméticas y la comprensión de los aspectos multiplicativos subyacentes a la notación

numérica; el diseño y aplicación de situaciones didácticas que apuntan a la comprensión de la agrupación decimal por parte de los niños nos permitió estudiar el pasaje de una concepción estrictamente aditiva de la notación numérica a una concepción caracterizada por la progresiva consideración de los aspectos multiplicativos involucrados en la organización del sistema posicional (Lerner y otros, 2003).

4. LA ENSEÑANZA USUAL DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

En la enseñanza usual, el SN es objeto de un tratamiento didáctico que fue analizado por diversos autores (entre ellos, Lerner y otros, 1994; Wolman, 2000; Quaranta, Tarasow y Wolman, 2003). En lo que sigue analizaremos sintéticamente la enseñanza usual del sistema de numeración y los presupuestos que la orientan, señalando los problemas que presenta tanto desde el punto de vista del objeto de enseñanza (el SN) como de su relación con las ideas de los sujetos.

- En la enseñanza usual del SN, se considera ineludible enseñar los números de a uno por vez, comenzando por los dígitos y respetando el orden de la serie. Se establecen cortes en el SN para secuenciar su enseñanza según los años de la escolaridad: de 1 a 100 en primero, hasta 1.000 en segundo y así sucesivamente. Desde el inicio y junto con la presentación del número diez, se incorporan las nociones de unidades y decenas. El orden de presentación de los números y la correspondiente explicitación del valor posicional son considerados requisitos necesarios para la enseñanza de los algoritmos convencionales.

Esta manera de presentar los números dosifica de tal modo al objeto de conocimiento que su comprensión se ve dificultada: no es posible detectar regularidades y descubrir la recursividad del agrupamiento, precisamente porque lo que no se permite es la interacción con el sistema en cuanto tal.

- Se emplean diferentes recursos materiales para concretar el principio de agrupamiento de base diez, a partir del cual todos los números que se presentan se traducen a concreciones realizadas con objetos y/o dibujos (ataditos de palitos, dibujos geométricos para indicar los diferentes órdenes surgidos del agrupamiento, etc.).

Estos recursos presentan varios inconvenientes cuando se intenta enseñar con ellos la posicionalidad que caracteriza nuestro SN. En efecto, al utilizarlos, lo que se pierde es justamente la posicionalidad, dado que es posible interpretar el número independientemente de cuál sea la posición en que estén ubicados: un atadito de diez y dos palitos siempre formarán doce sin importar que se coloque el atadito delante o detrás de los dos palitos. Estos recursos hacen que el SN se asemeje más a los sistemas aditivos –en los que se reitera la potencia de la base– que a los sistemas posicionales –en los que las potencias de la base se representan exclusivamente a través de la posición que ocupan los números–. Lerner señala al respecto: «Estos procedimientos para concretar el sistema de numeración tienen dos grandes inconvenientes desde el punto de vista de una didáctica constructivista: el primer gran inconveniente es que se deforma el objeto de conocimiento transformándolo en algo muy diferente de lo que él es; el segundo gran inconveniente es que se impide que los chicos utilicen los conocimientos que ya han construido en relación con el sistema de numeración» (Lerner, 1992b, p. 13).

- El modo en que se enseña el SN sintetizado en los puntos precedentes se concibe como necesario para la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos convencionales, ya que también se presupone que los alumnos no podrán resolver ninguna operación aritmética si no se les explica previamente cuáles son los pasos a seguir. Para ello, la conceptualización en unidades y decenas es necesaria.

Frente a esta caracterización, un amplio abanico de investigaciones señalan –y lo reconocen también quienes están vinculados a la práctica escolar– que la enseñanza habitual del SN y de los algoritmos convencionales correspondientes a las operaciones aritméticas en los primeros grados no facilita que los alumnos comprendan las razones de los pasos que se siguen para obtener el resultado. En efecto, los errores que cometen los niños al resolver algoritmos⁶ o las

⁶ Existe una amplia literatura en la que se ilustran los diferentes errores en la ejecución de los algoritmos clásicos. Véase, entre otros, Dickson, Brown y Gibson (1991), Resnick y Ford (1990) y Baroody (1988).

explicaciones que brindan acerca de los procedimientos empleados, incluso cuando obtienen el resultado correcto⁷ –fundamentalmente en las famosas cuentas de «llevarse o pedir prestado»–, testimonian la dificultad de los alumnos para comprender que dichas reglas están íntimamente relacionadas con los principios de nuestro sistema de numeración. (Lerner 1992a; Lerner, Sadovsky y Wolman 1994; Wolman, 1999). Se reconoce así un serio problema de la enseñanza usual: la dificultad de lograr que los alumnos comprendan realmente el principio que rige la numeración escrita. En efecto, cuando se enseña el algoritmo convencional de «sumar en columnas» los alumnos no necesitan poner en acción en todo momento los conocimientos sobre el SN. Si se tiene que calcular la suma de las unidades y las decenas, esto puede llevarse a cabo sin pensar lo que estas cifras representan.

Cuando la enseñanza se basa sólo en la transmisión de reglas, se impide a los alumnos utilizar y vincular los conocimientos que han construido y continuar construyéndolos, y, sobre todo, se les deja comprender que los procedimientos con los que se resuelven todas las operaciones están íntimamente vinculados con este sistema.

72

En síntesis: la enseñanza usual se diseña sobre el supuesto de que los niños tienen que comprender el sistema de numeración antes de comenzar a utilizarlo, pues el uso deviene de la correcta aplicación de los principios conceptuales que rigen al sistema. Se establece, entonces, un proceso didáctico que comienza con la explicación por parte del docente del principio de agrupamiento en base diez que rige al sistema, y que promueve luego la aplicación de ese principio a diversas situaciones de uso, como la resolución de pequeñas cuentas, el dictado de números, etcétera⁸.

⁷ Recordemos lo planteado en el primer punto: el sistema es injusto aun con los que la escuela considera sin riesgo de fracaso, que avanzan en su escolaridad, porque –aunque esto no se advierte fácilmente– estos niños no comprenden lo que la escuela intenta enseñarles, y ello sucede en un tiempo en el que podrían estar abordando cuestiones que les permitieran ir descubriendo estos principios.

⁸ Cabe aclarar que cuestionar una concepción de enseñanza no significa que esa concepción sea un «error» de algunos, en todo caso es una construcción colectiva bastante difundida. Son los estudios epistemológicos, psicológicos y didácticos los que actualmente permiten este cuestionamiento y, al mismo tiempo, pensar una alternativa diferente.

5. UNA ENSEÑANZA ENFOCADA A LA CONSTRUCCIÓN INFANTIL DE CONOCIMIENTOS SOBRE EL SN

El análisis de la enseñanza usual del SN nos ha permitido señalar cuán difícil es que los niños y niñas tengan oportunidad de comprender la naturaleza del sistema en virtud de las restricciones en el tratamiento didáctico del objeto. En este apartado plantearemos algunas características que asume la enseñanza cuando se enfoca a promover la construcción por parte de los alumnos de las razones que hacen al funcionamiento de los números, y cuando les permite así llegar a comprender los principios que rigen el sistema y las operaciones subyacentes a la notación numérica.

5.1 EL TRATAMIENTO DIDÁCTICO DEL OBJETO DE CONOCIMIENTO

Uno de los componentes fundamentales de la propuesta didáctica radica en que las situaciones que se diseñen propongan la interacción de los niños con el objeto de conocimiento, el SN, en toda su complejidad⁹.

En la perspectiva de nuestros estudios, estas preocupaciones se traducen en un principio didáctico que ha sido formulado como *del uso a la conceptualización*: el punto de partida del trabajo que se propone a los alumnos es el uso de la numeración escrita sin dosificaciones y sin utilizar recursos mediatizadores de los distintos agrupamientos. Usar la numeración escrita significa proponer situaciones donde los alumnos tengan que producir e interpretar escrituras numéricas (aunque no logren hacerlo convencionalmente), así como compararlas, ordenarlas y operar con ellas para resolver diferentes problemas. «Considerar lo que los niños ya saben acerca del objeto de conocimiento, diseñar situaciones didácticas que les permitan poner en juego sus conceptualizaciones y les planteen desafíos que los inciten a producir nuevos conocimientos son

⁹ Como ejemplo de abordaje del SN en toda su complejidad, podemos mencionar la situación «Juego de lotería» desarrollada en el programa de investigación. Esta secuencia de enseñanza se desarrolla en el inicio de primer grado de la escuela primaria y se encuadra dentro de situaciones centradas en el uso del SN y búsqueda de regularidades. Su objetivo didáctico es hacer avanzar las interpretaciones numéricas de los alumnos promoviendo la construcción de relaciones válidas desde el punto de vista de la organización del SN; la lotería ofrece la posibilidad de hacerlo en relación con un amplio sector de la serie que abarca los primeros noventa números. Puede consultarse Broitman y Kuperman (2005) y Quaranta, Tarasow y Wolman (2003).

condiciones esenciales para un proyecto didáctico que aspira a engarzar los conocimientos infantiles con los saberes culturalmente producidos» (Lerner, 2005, p. 148).

Esto involucra otro posicionamiento frente a las operaciones. En Lerner y otros (1994) ya se afirmaba que los chicos generan procedimientos numéricos originales para encontrar sus resultados. Los procedimientos que los alumnos emplean difieren de los convencionales, aunque, sin embargo, están vinculados a la organización del sistema de numeración decimal, y manifiestan el conocimiento que los alumnos están construyendo acerca del SN.

La organización de la numeración escrita y las operaciones guardan estrechas interrelaciones: por una parte comprender la notación numérica supone desentrañar cuáles son las operaciones subyacentes a ella; por otra parte, la resolución de operaciones constituye un terreno fecundo para profundizar la comprensión del SN. Ambos aprendizajes –del SN y de las operaciones– se influyen recíprocamente.

Por este motivo se propone que los alumnos resuelvan situaciones problemáticas sin haberles mostrado previamente algún método de resolución. Desde el punto de vista de la enseñanza, no introducir en el inicio de la escolaridad los algoritmos canónicos facilita que los niños elaboren otros procedimientos para resolver y representar operaciones, relacionados con sus concepciones sobre la numeración y las propiedades de las operaciones, aunque éstas funcionen frecuentemente de manera implícita.

Cuando los niños usan la numeración escrita en el sentido que mencionamos antes, van elaborando algunas *regularidades* en la organización de los números. Las elaboran cuando comparan números y establecen criterios como «a mayor cantidad de cifras, mayor es el número» –que les permite comparar números de diferente cantidad de cifras–, y «el primero es el que manda» –que les permite la comparación de los de la misma cantidad de cifras–. Este último criterio indica que el valor de una cifra no es siempre el mismo sino que está vinculado con su posición respecto a las otras que forman el número, criterio que los niños elaboran y utilizan sin saber aún las razones de este cambio de valor. Trabajar con amplios sectores de la serie les permite afirmar, por ejemplo, «primero vienen los que tienen uno solo, después vienen un montón con dos y después con tres» o «los de tres [cifras] son los de los cien». O al operar desplegando sus propios procedimientos descubren

que cuando se suma diez a un número de dos cifras, cambia en uno más el de adelante y el de atrás queda igual: «si le sumas diez al veintiocho, te va a dar treinta y ocho porque sólo cambia el de adelante»; y cuando se resta diez «me fijo en el número que le sigue para atrás del primero».

Las *regularidades* constituyen conocimientos importantes en el camino de aproximación al SN, y son el producto de reflexiones sobre aquello que sucede en el uso del SN y sus resultados. A su vez, son parte del camino previo que lleva a introducirse en la búsqueda de las *razones* que hacen al funcionamiento de dichas regularidades. En efecto, sólo tiene valor preguntarse por las razones de las regularidades una vez que éstas han sido elaboradas por los alumnos. Las *razones* explican las regularidades porque dependen, precisamente, de las operaciones que subyacen a la organización del SN, y su comprensión supone para el niño la construcción de una red de conocimientos a lo largo de un tiempo prolongado de aprendizaje.

5.2 EL TIPO DE SITUACIÓN

Una de las ideas vigentes en el plano didáctico es tomar como eje la producción del conocimiento por parte de los alumnos. Las situaciones que favorecen la construcción de nuevos conocimientos son aquéllas que plantean un problema, un desafío¹⁰.

75

¹⁰En este sentido, la secuencia didáctica del «Juego de la lotería» mencionado está diseñada de manera tal que este juego se convierta en un problema para los alumnos, ya que se les propone interpretar escrituras numéricas, la mayoría desconocidas por ellos, y sin que medie explicación del docente acerca de cómo hacerlo. Para jugar a la lotería tal como se juega socialmente, alcanzaría con conocer el nombre de las cifras, de esta manera se podría decir «cuatro y tres» para «cuarenta y tres». En el diseño de la situación didáctica se agregan nuevas reglas de juego de acuerdo a los objetivos didácticos que perseguimos: debe decirse el nombre de los números; una vez «cantado» el número, éste no se muestra hasta tanto no haya sido buscado en los cartones por los participantes. Cuando los cantores no conocen el número los compañeros pueden ayudarlo dando «pistas», pero sin decir el nombre del número. Para jugar con estas nuevas reglas los niños necesitan aprender los nombres de los números y su escritura, y lo harán a través de alguna estrategia: apoyarse en los números ya conocidos, recurriendo a algún material que los contenga ordenados para poder encontrar el número en cuestión, contando desde el uno, etc.

Otra secuencia estudiada en nuestras investigaciones es «Mayoristas y minoristas». Se trata de que los alumnos completen un cuadro de doble entrada con precios de vestimenta de una fábrica y tres negocios minoristas que recargan a esos precios, respectivamente, 10, 20 y 30 pesos cada uno; es decir, el problema está centrado en la resolución de operaciones. En clases posteriores, se proponen minoristas que aumentan 10, 30 y 50 pesos, respectivamente. Una vez completado el cuadro con los precios

Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tienen entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar [...] (Sadovsky, 2005, p. 13).

La situación requiere que sea asimilable y, al mismo tiempo, que presente alguna dificultad para que los alumnos logren elaborar un conocimiento del cual no disponían. Los intentos de solución harán posible la construcción de un conocimiento por los alumnos si se les ofrece la posibilidad de establecer nuevas relaciones con los conocimientos que ya disponen.

Por eso cobran especial relevancia los problemas que se plantean, el trabajo que se propone en torno a ellos, las reflexiones que se promueven en relación con las distintas soluciones; los procedimientos empleados, la validez de los mismos, la manera de registrarlos; el conocimiento que circula en la clase; las intervenciones docentes que generan y que sostienen esta actividad. De esta manera, se logra que los alumnos avancen, ampliando, modificando o cambiando sus conocimientos previos.

5.3 LA INTERVENCIÓN DOCENTE

Debido a las características de las situaciones planteadas, se hacen necesarias ciertas propiedades de la intervención docente. Estamos a tanta distancia de la práctica de explicitar la regla de agrupamiento –práctica que es propia de la enseñanza tradicional del SN– como de las posiciones que tienden a identificar el papel del docente con el de un simple facilitador, cuya tarea principal se juega en el diseño de una situación que favorezca la libre exploración de los sujetos.

correspondientes a los minoristas, el maestro organiza una segunda situación en la que conduce una discusión que apunta a reflexionar sobre los procedimientos utilizados, a retomar regularidades ya detectadas –o descubrir nuevas– entre las operaciones y los números escritos en el cuadro. En esta discusión se busca que los alumnos expliciten esas regularidades y reflexionen sobre ellas vinculándolas con las sumas (agregar nudos de decenas) y la organización del sistema de numeración. Desde la perspectiva didáctica, focalizar en la relación existente entre notación numérica y operaciones aritméticas constituye un escenario privilegiado para profundizar la comprensión del sistema de numeración.

Hay aquí, como hemos visto, un modo peculiar de construir las situaciones, pero también un modo peculiar de intervenir en el curso de su desarrollo. Una suerte de *regla de oro* es que el docente no interviene formulando directamente el saber que espera ver aparecer en sus alumnos a partir de la interacción con la situación, sino que las intervenciones son pensadas como generadoras de condiciones para que el saber que se requiere poner en juego en cada situación aparezca, se analice y se explicita.

En las situaciones didácticas que hemos estudiado se anticipan intervenciones posibles, sugiriendo un abanico de posibilidades. En nuestros estudios, el análisis de las intervenciones que se desplegaron reveló un hecho que reviste particular interés: cada maestro hace una versión propia de las intervenciones propuestas y las utiliza de maneras diferentes en distintos momentos de la clase¹¹.

Para interpretar el sentido de estas variaciones, para comprender de qué modo los maestros asimilan las intervenciones propuestas, en qué circunstancias las utilizan y cuáles son las nuevas intervenciones que producen, es necesario hacer intervenir en el análisis, hipótesis o inferencias acerca de la manera en que cada docente conceptualiza el contenido que está intentando enseñar y acerca de la concepción del proceso de aprendizaje de ese contenido que está poniendo en acto (Lerner y otros, 2000).

77

Cuando se afirma que la manera en que el docente conceptualiza el objeto a enseñar, en un sentido general, incide en el desarrollo de la secuencia, nos estamos refiriendo a modos específicos de poner en juego ese conocimiento en la situación. Como se ha señalado, las intervenciones docentes no son de carácter general, sino específicas para este objeto en cuestión. Cuando un maestro *interpreta una respuesta* de un alumno, lo hace en referencia a qué aspecto o aspectos del funcionamiento numérico pueden estar sosteniendo esa respuesta.

Supongamos la siguiente situación. En la tarea de interpretación de números, frente a un grupo de alumnos que no consigue leer el 74, el maestro pregunta a todos si el nombre de alguno de los números

¹¹ Un ejemplo de estas variaciones es lo ocurrido con «la pista de los nudos» que consiste en suministrar como ayuda a los niños que no podrían leer convencionalmente un número, el nudo inmediatamente anterior y, en caso de que tampoco pudieran interpretarlo, anotar la serie de los nudos.

escritos hasta ese momento sirve para leer éste. Ante una intervención como ésta, los alumnos pueden señalar diversos números presentes: el que comparte el nudo con el número a interpretar, la serie de nudos o un número que sea el que resulta de invertir las cifras del 74. El modo en que el maestro entiende cada una de estas posibles respuestas de los alumnos depende de su conocimiento del objeto de conocimiento y de las reglas de funcionamiento de este objeto que hacen que, mientras que las dos primeras respuestas de los alumnos pueden plantearse como ayudas genuinas, en el sentido de ser pertinentes al objeto, la última no lo sea.

El análisis didáctico sobre el objeto es el que permite a los maestros interpretar una respuesta o una pista formulada por un alumno en términos de los aspectos conceptuales del sistema. Es este mismo saber sobre el objeto lo que permite *interpretar un error* de los alumnos no sólo en términos de lo que «falta» para una interpretación convencional de los números sino en términos de aquellos aspectos del objeto que sí están siendo considerados por el alumno. De forma recíproca, ocurre durante la secuencia que los esfuerzos de los maestros por encontrar sentido a las intervenciones de los alumnos les permiten una mayor complejidad en la comprensión de los aspectos conceptuales del objeto de conocimiento.

78

Dadas las características de la enseñanza que se postulan, la intervención docente no está completamente predeterminada sino que se decide cada vez como producto de la evaluación que el maestro hace de las dificultades que están teniendo los alumnos y de los saberes que están poniendo en juego con sus preguntas, sus pistas y sus errores. Estas intervenciones tienen el propósito de generar condiciones para que los alumnos avancen en la interpretación numérica, sin reemplazarlos en la tarea de encontrar las claves que permiten resolver los desafíos, sino ayudándolos de modos cuya adecuación tiene que ser calibrada en cada oportunidad. Es en este sentido que, para la actuación docente, no es suficiente con saber mucho sobre el objeto: se requiere saber mucho también sobre las intervenciones específicas que mejor pueden ayudar a los alumnos en un momento determinado.

Puede decirse, entonces, que en esta manera de abordar la enseñanza el alumno queda «expuesto a la comprensión del profesor», en el sentido de que tanto el diseño de la enseñanza como la intervención en el desarrollo de las clases depende de la comprensión que el maestro tiene del objeto de conocimiento y de la comprensión que también tiene de los procesos que están siguiendo los alumnos en el aprendizaje de este objeto.

6. ALGUNAS PREOCUPACIONES EN RELACIÓN CON EL PROCESO DE CONCEPTUALIZACIÓN

Como vimos, se propone un recorrido didáctico que va «del uso a la reflexión, de la reflexión al establecimiento de regularidades y de las regularidades a la búsqueda del principio que rige el sistema»¹² (Lerner y otros, 1994). No debería escapársenos que este recorrido didáctico es, también, *un recorrido psicológico*, algo que esperamos suceda a los sujetos bajo las particulares condiciones que se generan en el régimen didáctico en el que los incluimos.

El «punto de llegada» es según este recorrido la comprensión de los principios que rigen al SN. En este punto, no podemos soslayar la preocupación por el modo en que la definición de los objetivos pedagógicos que persiguen las situaciones pueda contribuir a *disparar las expectativas* acerca de lo que los sujetos deben aprender en la escuela.

Hemos documentado situaciones en las que los sujetos alcanzan un uso notablemente eficaz de la numeración para resolver situaciones que tienen en sí mismas un sentido matemático y un sentido social. Ha sido menos frecuente documentar situaciones en las que los sujetos progresan en la conceptualización en las direcciones en que sería posible una mejor comprensión de las reglas del sistema.

79

La pregunta que produce inquietud podría formularse del siguiente modo: ¿hasta dónde disparar la conceptualización? ¿Qué es razonable esperar del aprendizaje de los alumnos, aun bajo las peculiares condiciones de trabajo didáctico que tratamos de proponer?

Por un lado, parece interesante propiciar formas de funcionamiento didáctico que promuevan procesos de conceptualización creciente en los alumnos. A la pregunta sobre cuál es el límite de la conceptualización a la que aspiramos, responderíamos: no hay más límite que los que el objeto mismo pueda imponer, puesto que esperamos que los sujetos construyan las reglas que rigen al SN.

Pero, desde una perspectiva pedagógica, no podemos soslayar el hecho de que ciertos determinantes duros del dispositivo escolar ligan

¹² En esta perspectiva, avanzar del uso eficaz a la conceptualización supone un pasaje de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento y, en tal sentido, se enrola con interrogantes básicos de la teoría genética.

los logros cognitivos de los alumnos con su éxito o fracaso en la escuela y con las consecuencias de tal éxito y fracaso para su destino social más general. El hecho de que la perspectiva didáctica que adoptamos sofistique los propósitos que nos planteamos en relación con el aprendizaje de los sujetos, no debe entenderse como un aumento de las exigencias que pesan sobre ellos a la hora de acreditar su experiencia escolar, sino como un requerimiento de reformulación de la enseñanza del SN en la dirección que marcamos en este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

- ALVARADO, Mónica (2002): *La construcción del sistema gráfico numérico en los momentos iniciales de la adquisición del sistema gráfico alfabético*. Tesis doctoral. México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (DIE-CINVESTAV).
- ALVARADO, Mónica y FERREIRO, Emilia (2000): «El análisis de nombres de números de dos dígitos en niños de 4 y 5 años», en *Lectura y Vida. Revista Latinoamericana de Lectura*, marzo de 2000, año 21, n.º 1.
- BAROODY, A. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Aprendizaje Visor.
- BEDNARZ, Nadine (1991): «Interactions sociales et construction d'un système d'écriture des nombres en classe primaire», en C. Garnier, N. Bednarz y I. Ulanovskaya (comps.): *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste*. Bruselas: De Boeck-Wesmael.
- BEDNARZ, N. y JANVIER, B. (1982): «The Understanding of Numeration in Primary School», en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 13, n.º 1.
- BENAVOT, Aarón (2002): «Un análisis crítico de la investigación comparativa en educación», en *Perspectivas*, vol. XXXII, n.º 1, marzo de 2002, pp. 53-81.
- BRIZUELA, Bárbara (1997): «Inventions and Conventions: A Story About Capital Numbers», en *For the Learning of Mathematics*, n.º 17, 1. Vancouver: Vancouver Publishing Association.
- (2001): *Children's Ideas About the Written Number System*. Tesis doctoral. Escuela de Educación de la Universidad de Harvard.
- BROITMAN, C. y KUPERMAN, C. (2005): *Interpretación de números y exploración de regularidades en la serie numérica*. Ficha de Cátedra Didáctica de Nivel Primario. Departamento de Ciencias de la Educación. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires.
- CONNEL, R. W. (1997): *Escuelas y justicia social*. Madrid: Morata.

- DEBLOIS, L. (1996): «Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire», en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 16, n.º 1, pp. 71-128, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- DICKSON, L., BROWN, M. y GIBSON, O. (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.
- ESTEVE, J. M. (2006): «Identidad y desafíos de la condición docente», en E. Tenti Fanfani (comp.): *El oficio del docente. Vocación, trabajo y profesión en el siglo XXI*. Buenos Aires: IIPE-UNESCO sede Buenos Aires / Fundación OSDE / Siglo XXI Editores.
- FERREIRO, Emilia (1986): «La representación del lenguaje y el proceso de alfabetización», en *Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso*. Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.
- GUITEL, Geneviève (1975): *Histoire comparée des numérations écrites*. París: Flammarion.
- HIGINO DA SILVA, Z. M. (1990): «A criança e a escrita numérica», en *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, vol. 71, n.º 168, pp. 141-162, Brasília.
- HUGHES, Martin (1987): *Los niños y los números*. Barcelona: Planeta.
- IFRAH, Georges (1987): *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza.
- LERNER, Delia (1992a): *La matemática en la escuela. Aquí y ahora*. Buenos Aires: Aique.
- (1992b): «El enfoque constructivista en la enseñanza de la matemática. Un análisis crítico de su implementación», en *Constructivismo y escuela*. Buenos Aires: Cuadernos de la Fundación Escuela de Psicopedagogía Clínica (EPPEC).
- (2005): «¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración», en M. Alvarado y B. Brizuela (comps.): *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*. México: Paidós Mexicana.
- LERNER, Delia y OTROS (2000): *El aprendizaje del sistema de numeración: situaciones didácticas y conceptualizaciones infantiles*. Proyecto Anual AF 16. Informe final. Universidad de Buenos Aires.
- (2003): *El sistema de numeración. Enseñanza, aprendizaje escolar y construcción de conocimientos*. Proyecto bianual 2001-2002 F 083 (Programación Científica 2001-2002). Informe final. Universidad de Buenos Aires.
- LERNER, Delia, SADOVSKY, Patricia y WOLMAN, Susana (1994): «El sistema de numeración: un problema didáctico», en Cecilia Parra e Irma Saiz, (comps.): *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.
- MARTÍ, Eduardo (2003): *Representar el mundo externamente. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación*. Madrid: Machado Libros.
- MARTÍNEZ RUIZ, M. A. y TOLCHINSKY LANDSMANN, L. (1993): «La alfabetización numérica», en *Cuadernos de Pedagogía. Monográfico dedicado a Leer y Escribir*, n.º 216, pp. 60-61.

- NUNES CARRAHER, Terezinha (1989): «O desenvolvimento mental e o sistema numérico decimal», en Terezinha Nunes Carraher, (org.): *Aprender pensando*. Petrópolis: Vozes.
- NUNES CARRAHER, Terezinha y BRYANT, Peter (1998): *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI.
- PONTECORVO, C. (1985): «Figure, parole, numeri: un problema di simbolizzazione», en *Età Evolutiva*, n.º 22, octubre de 1985, Roma.
- QUARANTA, M. E., TARASOW, P. y WOLMAN, S. (2003): «Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas», en M. Panizza (comp): *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós. [Hay versión en portugués: *Ensinar matemática na educação infantil e nas series iniciais*. Brasil: Artmed Editora].
- RESNICK, L. y FORD, W. (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.
- RODD, M. M. (2000): «On Mathematical Warrants: Proof Does not Always Warrant, and a Warrant May be Other Than a Proof», en *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 2, n.º 3, pp. 221-244. Mahwah, N J: Lawrence Erlbaum Associates.
- RODRÍGUEZ, Pedro (2002): «De nuevo, la justicia», en *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, vol. XXXII, n.º 4, pp. 5-10.
- SADOVSKY, Patricia (2005): *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Del Zorzal.
- SASTRE, Genoveva y MORENO, Montserrat (1980): *Descubrimiento y construcción de conocimientos. Una experiencia de pedagogía operatoria*. Barcelona: Gedisa.
- SCHEUER, Nora y OTROS (1996): «Éste es más grande porque... o cómo los niños comparan numerales», en *Revista Argentina de Educación*, n.º 24, octubre de 1996.
- (2000): «Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales», en *Infancia y Aprendizaje*, n.º 90, pp. 31-50.
- SERON, X., DELOCHE, G. y NÖEL, M. (1991): «Un transcodage des nombres chez l'enfant: la production des chiffres sous dictée», en J. Bideaud y otros (eds.): *Les chemins du nombre*. Lille: Presses Universitaires de Lille.
- SERON, X., VAN LIL, M. y NÖEL, M. (1995): «La Lecture de numéraux arabes chez des enfants en première et en deuxième années primaires: recherche exploratoire», en *Archives de Psychologie*, vol. 63, n.º 247, pp. 269-300. Genève.
- SINCLAIR, A. TIECHE-CRISTINAT, C. y GARÍN, A. (1994): «Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits á plusieurs chiffres?», en M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavinot (eds.): *Vingt ans des mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- SINCLAIR, Anne y SINCLAIR, Hermine (1984): «Las interpretaciones de los niños preescolares sobre los números escritos», en *Human Learning*, vol. 3, pp. 173-184. Traducción de Flavia Terigi.

- SINCLAIR, A., SIEGRIST, F. y SINCLAIR, H. (1983): *Young Children Ideas About the Written Number System*. Ponencia en la Conferencia de la OTAN sobre adquisición del símbolo. Mimeo de 13 páginas.
- SINCLAIR, Hermine (dir.) (1988): *La Production de notations chez le jeune enfant*. París: Presses Universitaires de France (PUF).
- SISTEMAS DE INFORMACIÓN DE TENDENCIAS EDUCATIVAS EN AMÉRICA LATINA (SITEAL): «La transmisión intergeneracional de las desigualdades educativas», en *Boletín*, n.º 3. <<http://www.siteal.iipe-oei.org>> [consulta: feb. 2007].
- *Resumen estadístico I. Totales nacionales*. <<http://www.siteal.iipe-oei.org>> [consulta: dic. 2006].
- TERIGI, Flavia (1992): «En torno a la psicogénesis del sistema de numeración: estado de la cuestión, perspectivas y problemas», en *Revista Argentina de Educación*, n.º 17. Buenos Aires.
- (1999): *Currículo. Itinerarios para aprehender un territorio*. Buenos Aires: Santillana.
- TERIGI, Flavia y BAQUERO, Ricardo (1997): «Repensando o fracasso escolar pela perspectiva psicoeducativa», en Anete Abramovicz y Jaqueline Moll: *Para além do fracasso escolar*. Porto Alegre: Papyrus.
- TERIGI, Flavia, QUARANTA, María Emilia y WOLMAN, Susana (1999): *La relación entre situaciones didácticas y conceptualizaciones infantiles en el aprendizaje del sistema de numeración: avances de un estudio en curso*. Ponencia presentada en el simposio: «Conocimientos sobre el sistema de numeración, procedimientos de resolución de operaciones aritméticas y situaciones didácticas», llevado a cabo en el marco del 29.º Simposio Anual organizado por la Jean Piaget Society. México, 2-5 de junio de 1999.
- WOLMAN, Susana (1999): «Los algoritmos de suma y resta: ¿por qué favorecer desde la escuela los procedimientos infantiles?», en *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, año VIII, n.º 14, agosto de 1999.
- (2000): «La enseñanza de los números en el nivel inicial y en el primer año de la EGB», en Ana María Kaufmann (comp.): *Letras y Números*. Buenos Aires: Santillana.