Exacta
ISSN: 1678-5428
exacta@uninove.br
Universidade Nove de Julho
Brasil

A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura

Maira Mendias Lauro
Mestranda em Educação
[Ensino de Ciências e Matemática] – USP;
Professora na graduação – Uninove.
mairaml@terra.com.br, São Paulo [Brasil]

Os antigos gregos consideravam mais harmoniosos e belos os retângulos que estivessem numa proporção conhecida como áurea. O templo grego Partenon, construído no século V a.C., talvez seja o exemplo mais emblemático do emprego dessa proporção que revela a preocupação em realizar obras de extrema harmonia. Esse critério estético atravessou os séculos e é adotado, ainda hoje, por alguns artistas. Neste trabalho, apresentamos e discutimos alguns exemplos do emprego dessa proporção nas artes, nas obras arquitetônicas e também na natureza e nas proporções do corpo humano, demonstrando a presença da Geometria no mundo à nossa volta.

Palavras-chave: Padrões harmônicos. Pentagrama. Razão áurea. Retângulo áureo.

1 Introdução

> A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro a Proporção Áurea. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa. (KEPLER, apud ÁVILA, 1985, p. 14).

O que há de comum entre a estrutura espiral das conchas de alguns seres vivos marinhos, no crescimento das plantas, nas proporções do corpo humano e dos animais, nas pinturas do período renascentista, nas obras arquitetônicas da Antiguidade Clássica, da Idade Média e até da Era Moderna?

Há cerca de 2,5 mil anos esta questão já intrigava os gregos. Euclides (323-285 a. C.), o matemático grego autor de *Os elementos*, obra fundamental da geometria, descreveu em sua Proposição VI, uma maneira de se buscar o modo mais harmonioso de "[...] dividir um segmento de reta em média e extrema razão [...]" (EUCLIDES, apud EVES, 1992, p. 42), ou seja, dividir um segmento de reta em duas partes, de tal modo que a razão entre a menor e a maior parte fosse igual à razão entre a maior parte e o segmento total. O resultado dessa divisão é simbolizado pela letra grega φ (lê-se "fi") e é sempre igual a 0,618...[1]. Tal razão é conhecida como "razão áurea" ou "divina proporção".

> A razão áurea pode ter sido conhecida mesmo antes da época dos gregos. O historiador grego Heródoto relata que os sacerdotes egípcios disseram que na pirâmide de Giseh, a razão entre suas dimensões é φ (EVES, 1992, p. 44).

As propriedades estéticas e artísticas dessa razão são mostradas no "retângulo áureo" – um retângulo cujos lados estão na razão de 1 para φ ou de φ para 1, como veremos mais adiante. Esse retângulo é considerado como o mais agradável aos olhos. Muitos trabalhos famosos de arquitetura e arte, tais como o Partenon grego, a catedral de Chartres e alguns quadros de Leonardo da Vinci, foram baseados no retângulo áureo.

A razão áurea também foi estudada pelo monge Luca Pacioli, de Veneza, que escreveu um tratado *De divina proportione* (Sobre a proporção divina), em 1509. Tal obra foi ilustrada por Leonardo da Vinci (EVES, 1992, p. 44).

O matemático italiano Leonardo de Pisa, o Fibonacci (1180-1250), em seu livro *Liber Abaci*, de 1202 (CARVALHO, 1990, p. 6), propôs o seguinte problema:

> Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?

Tal problema deu origem a uma seqüência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Essa seqüência, em que todo termo, após o segundo, é igual à soma dos dois que o precedem, recebeu o nome de seqüência de Fibonacci. Em 1753, o escocês Robert Simson descobriu que a razão entre dois termos sucessivos quaisquer dessa seqüência tende a φ como limite, à medida que se avança mais e mais ao longo da seqüência, como está mostrado na Tabela 1 (compare os números da tabela com o exemplificado na nota 1).

Hoje sabemos que φ aparece também na natureza – por exemplo, na margarida, no girassol e na concha do molusco náutilo – em particular nas proporções do corpo humano.

A razão áurea representa, segundo os estudiosos, a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas.

Tabela 1: Razão entre termos sucessivos da seqüência de Fibonacci

1 ÷ 1	=	1,00000000000000000000000000000
1 ÷ 2	=	0,50000000000000000000000000000
2 ÷ 3	=	0,66666666666666666666666666667
3 ÷ 5	=	0,60000000000000000000000000000
5 ÷ 8	=	0,62500000000000000000000000000
8 ÷ 13	=	0,615384615384615384615384615385
13 ÷ 21	=	0,619047619047619047619047619048
21 ÷ 34	=	0,61764705882352941176470588235
34 ÷ 55	=	0,61818181818181818181818181818
55 ÷ 89	=	0,61797752808988764044943820225
89 ÷ 144	=	0,61805555555555555555555555556
144 ÷ 233	=	0,61802575107296137339055793991
233 ÷ 377	=	0,61803713527851458885941644562
377 ÷ 610	=	0,61803278688524590163934426229
610 ÷ 987	=	0,61803444782168186423505572442
987 ÷ 1.597	=	0,61803381340012523481527864746
1.597 ÷ 2.584	=	0,61803405572755417956656346749
2.584 ÷ 4.181	=	0,61803396316670652953838794547
4.181 ÷ 6.765	=	0,61803399852180339985218033998
6.765 ÷ 10.946	=	0,61803398501735793897314087338

Fonte: A autora.

Esperamos que, com este trabalho, por meio do apanhado histórico e das aplicações da razão áurea, no mundo à nossa volta, possamos contribuir para a difusão do tema nas diversas áreas do conhecimento.

2 O retângulo áureo

Chama-se retângulo áureo (ou retângulo de ouro) um retângulo ABCD com a seguinte propriedade: se o dividirmos em um quadrado e um outro retângulo, o novo retângulo será semelhante ao original. Ver Ilustração 1.

Sendo a e b as dimensões do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:

$$\frac{b}{a} = \frac{a - b}{b}$$

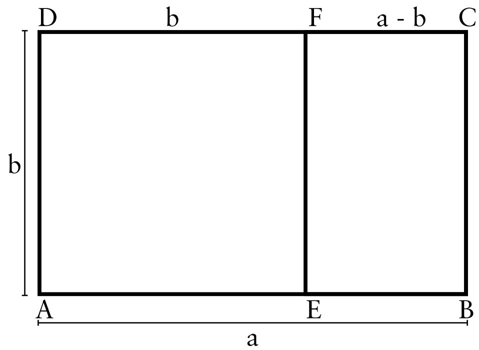


Ilustração 1: Retângulo áureo
Fonte: A autora.

De onde segue que $b^2 = a^2 - ab \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau na incógnita b > 0, temos:

$$b = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow b = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)a \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Se invertermos a razão entre os segmentos, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

A razão obtida entre os lados do retângulo ABCD é conhecida como razão áurea e, para identificá-la, usamos a letra grega φ (fi). Denotaremos por ϕ, o inverso dessa razão:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0{,}618 \text{ e } \phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1{,}618$$

3 A construção geométrica de retângulo áureo

Se desenharmos um retângulo, no qual a razão entre os comprimentos dos lados, menor e maior, é igual à razão áurea, obteremos um retângulo áureo (ou retângulo de ouro):

- Construir um quadrado ABCD qualquer.
- Encontrar o ponto médio M do lado AB.
- Com centro em M e raio MC, traçar um arco de circunferência que intercepta o prolongamento do lado AB no ponto E.
- AE é base do retângulo áureo.
- Para completá-lo, basta traçar uma reta perpendicular a AE pelo ponto E, que intercepta o prolongamento de CD no ponto F.
- AEFD é um retângulo áureo.

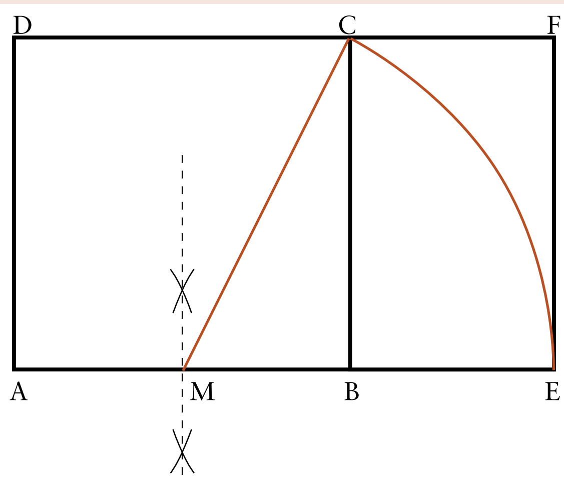


Ilustração 2: Construção de retângulo áureo
Fonte: A autora.

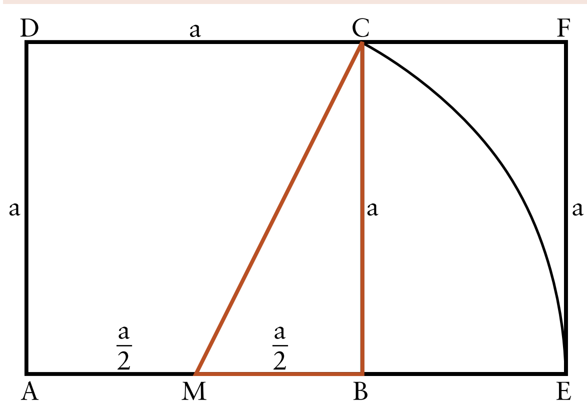


Ilustração 3: Justificativa da construção de retângulo áureo
Fonte: A autora.

Justificativa da construção:

Seja "a" o lado do quadrado ABCD construído.

Por construção, o triângulo MBC é retângulo. Dessa forma, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 \Leftrightarrow MC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow$$

$$MC^2 = \frac{5a^2}{4}$$

Portanto:

$$MC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

ME = MC, por construção.

Assim, temos:

$$AE = AM + ME \Leftrightarrow AE = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)} \Leftrightarrow$$

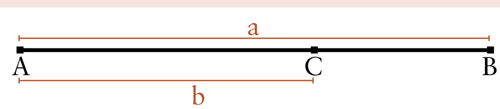
$$\frac{AD}{AE} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} \Leftrightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} \Leftrightarrow \frac{AD}{AE} \cong 0{,}618$$

Portanto AEFD é um retângulo áureo.

4 O segmento áureo

Seja AB um segmento de comprimento a com um ponto C em seu interior que o divide em duas partes com a seguinte propriedade: a razão entre a menor parte e a maior parte é igual à razão entre a maior parte e o segmento total. Chamaremos b à maior parte (segmento AC).



$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

Ilustração 4: Segmento áureo
Fonte: A autora.

O segmento AC com essa propriedade é chamado "segmento áureo" de AB (divisão áurea ou divisão em média e extrema razão de um segmento).

A relação $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$ é precisamente a relação $\frac{b}{a} = \frac{a - b}{b}$ se pusermos AB = a e AC = b.

Logo, $AC = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) AB$.

5 A construção geométrica de segmento áureo

- É dado o segmento AB de medida a.
- Determinar o ponto médio M de AB.
- Traçar uma reta perpendicular ao segmento AB pela extremidade B.
- Determinar o ponto D na perpendicular tal que BD = BM.
- Traçar uma reta pelos pontos A e D.
- Com centro em D, traçar uma circunferência de raio BD.
- Determinar os pontos E e E' de intersecção entre o segmento AD e a circunferência anterior.
- AE = AC = segmento áureo interno de AB : $AE = AC = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) AB$
- AE' = AC' = segmento áureo externo de AB : $AE' = AC' = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) AB$

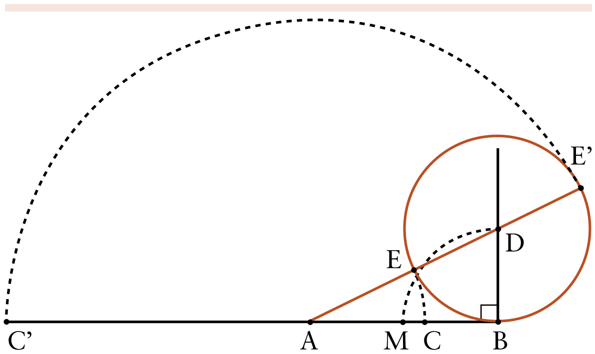


Ilustração 5: Construção de segmento áureo

Fonte: A autora.

Justificativa da construção:

Sejam a = AB e b = AC. Como $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$, então temos $\frac{b}{a} = \frac{a - b}{b}$

ou seja, $b^2 + ab = a^2$.

O primeiro membro da equação tornar-se-á um quadrado perfeito se lhe for adicionado $\left(\frac{a}{2}\right)^2$:

$$b^2 + ab + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(b + \frac{a}{2}\right) = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ou seja, teremos um triângulo retângulo de hipotenusa $b + \frac{a}{2}$ e catetos a e $\frac{a}{2}$.

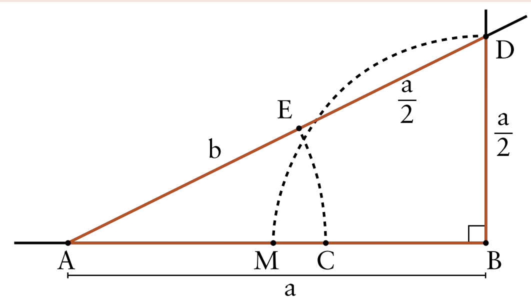


Ilustração 6: Justificativa da construção de segmento áureo

Fonte: A autora.

Fazendo $y = b + \frac{a}{2}$, teremos:

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Logo,

$$b + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \Leftrightarrow b = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)a \Leftrightarrow AC \cong 0{,}618\ AB.$$

Por outro lado,

$$AC' = AE' = AD + DE' \Leftrightarrow$$

$$AC' = \left(b + \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} \Leftrightarrow AC' = b + a$$

Substituindo o valor de b encontrado, teremos:

$$AC' = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + a \Leftrightarrow AC' = \frac{a\sqrt{5} - a + 2a}{2} \Leftrightarrow$$

$$AC' = \frac{a\sqrt{5} + a}{2} \Leftrightarrow AC' = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)a$$

$$\therefore AC' = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)AB \text{ ou seja, } AC' \cong 1{,}618\ AB.$$

6 A espiral áurea

Um retângulo áureo tem a interessante propriedade de que, se o dividirmos num quadrado e num retângulo, o novo retângulo será também áureo. Repetindo este processo infinitamente, teremos:

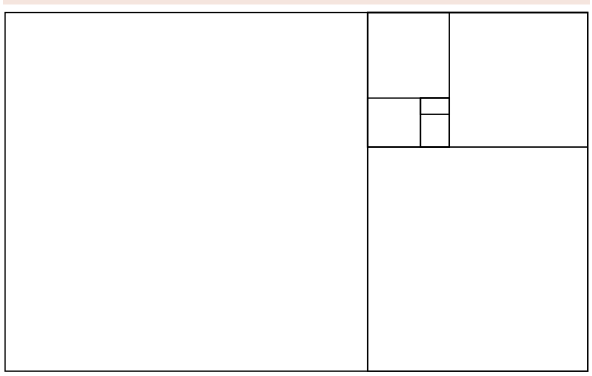


Ilustração 7: Seqüência infinita de retângulos áureos
Fonte: A autora.

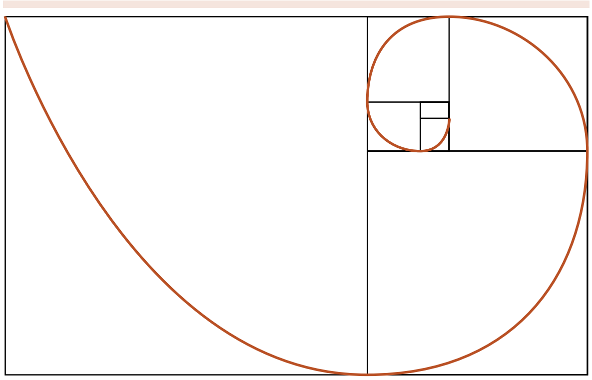


Ilustração 8: Espiral áurea sobre seqüência infinita de retângulos áureos
Fonte: A autora.

E unindo os cantos dos quadrados gerados, obtém-se uma espiral denominada "espiral áurea":

7 O pentagrama

A razão áurea fascinou os antigos gregos e, por razões estéticas, foi largamente usada por artistas e arquitetos. Ela é conhecida desde os pitagóricos (século V a.C.). Essa razão foi descoberta no pentágono regular, que exibe segmentos divididos na razão áurea. Talvez esse tenha sido o motivo que levou os discípulos de Pitágoras a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita.

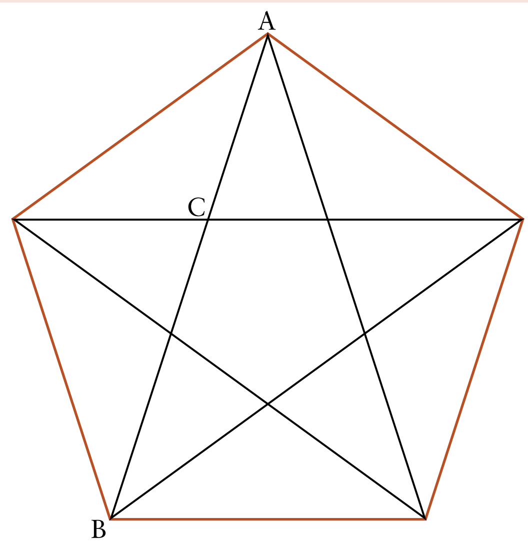


Ilustração 9: Pentagrama
Exemplo da ocorrência da divisão áurea num pentágono regular: a intersecção de duas de suas diagonais divide qualquer uma delas em média e extrema razão. Por exemplo:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB} \cong 0{,}618$$

Fonte: A autora.

Esta figura envolve um misticismo, provavelmente, em razão de suas propriedades pois, ao desenharmos um pentágono regular e traçarmos suas diagonais veremos que elas se cruzam e formam um novo pentágono interior ao anterior.

$\frac{AC}{CB}$ $\frac{CB}{AB}$

Consideremos o triângulo ABC que é isósceles especial, ou seja, a bissetriz de um dos ângulos da base divide o triângulo em dois novos triângulos isósceles:

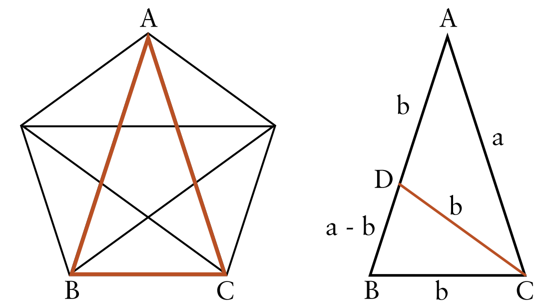


Ilustração 10: Triângulo isósceles áureo no pentagrama
Fonte: A autora.

Podemos verificar que os triângulos ABC e BCD são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes congruentes e, portanto, os lados correspondentes proporcionais:

$$\frac{b}{a-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cong 0{,}618$$

Tal triângulo é chamado "triângulo isósceles áureo". Assim como no retângulo áureo, identifica-se a propriedade de permitir que, ao traçarmos a bissetriz de um dos ângulos da base, o novo triângulo seja também de ouro. Repetindo este processo infinitamente, temos:

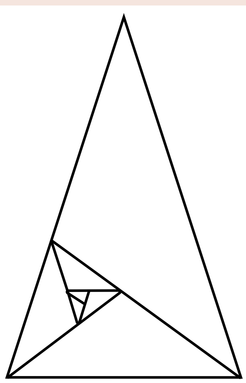


Ilustração 11: Seqüência infinita de triângulos áureos
Fonte: A autora.

E também podemos obter uma espiral áurea:

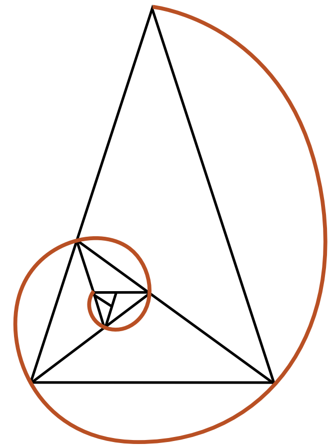


Ilustração 12: Espiral áurea sobre seqüência infinita de triângulos áureos
Fonte: A autora.

8 A razão áurea e as obras arquitetônicas

O retângulo áureo foi muito utilizado nas construções gregas. Os gregos o consideravam a figura geométrica mais harmoniosamente dimensionada e o Partenon, ou templo da deusa Atena, construído no século V a.C. pelo arquiteto e escultor Fídias, é um dos mais famosos exemplos dessas construções.

O Partenon possui, na fachada principal, um quase exato retângulo áureo:

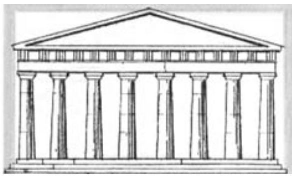



Ilustração 13: Partenon
Fonte: TV Cultura (2001).

Outra obra arquitetônica importante é a Catedral de Notre Dame de Chartres, na França, considerada a rainha das catedrais góticas,[2] a fonte em pedra e luz de toda uma fé.

No início do século IV, a primeira diocese de Chartres era um edifício feito inteiramente de madeira, de tamanho modesto se comparado às construções de hoje. Na Idade Média, a catedral pegou fogo 13 vezes, em 350 anos; por essa razão, sua estrutura foi sendo alterada a cada nova restauração. Após o incêndio de 1194, a catedral gótica foi erguida pela população da cidade que entendia o trabalho não apenas como tarefa religiosa, mas também como meio de expiar seus pecados. Em 1220, concluiu-se a construção. A catedral tem medidas gigantescas, comparáveis às de um estádio e é a mais alta igreja gótica que existe.

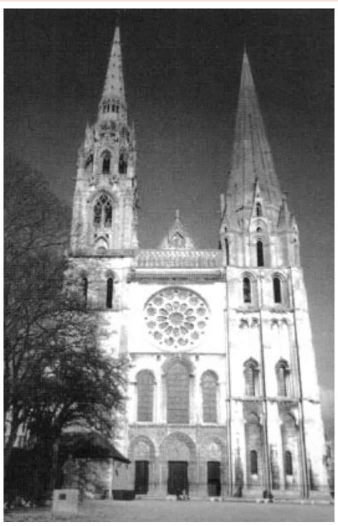


Ilustração 14: Catedral de Chartres: vista da entrada principal
Fonte: Klug (2002, p. 1).

Conta-se que a catedral, em sua forma gótica, é favorecida por uma estrela da sorte, pois, desde 1194, ela e toda a localidade têm sido poupadas de incêndios, guerras e outras catástrofes.

O fato de as catedrais góticas permanecerem estáveis indefinidamente, apesar da enorme altura, deve-se à sua geometria especial. Forças de pressão e de sucção equilibram-se harmoniosamente para que a estrutura não ceda. Na questão da estabilidade, tem importância particular a disposição retangular de arcos e pilares. Os arcos ogivais são construídos sobre o pentagrama.

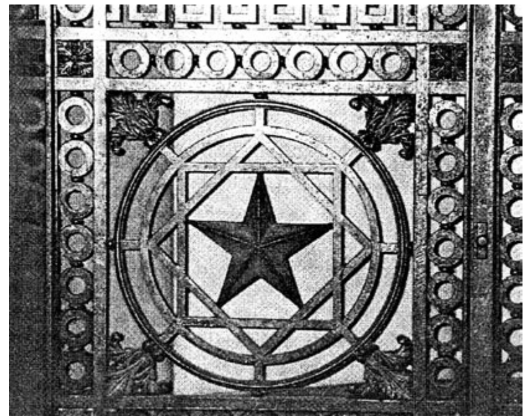


Ilustração 15: Pentagrama no centro de um octógono no portão do coro da Catedral de Chartres
Fonte: Klug (2002, p. 71).

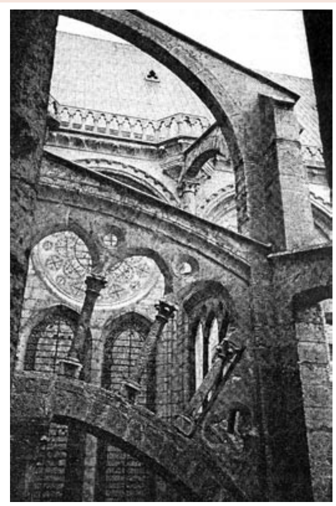


Ilustração 16: Disposição retangular dos arcos e pilares que apóiam a igreja num ângulo de 108°
Fonte: Klug (2002, p. 140).

A razão áurea se encontra em muitas proporções espaciais na catedral. O retângulo áureo foi utilizado na própria planta da igreja:

No portal oeste, entrada principal da catedral, há “figuras vestidas”, esculturas que representam o profeta Davi, a rainha de Sabá e o rei Salomão, e que foram estruturadas de acordo com a razão áurea.

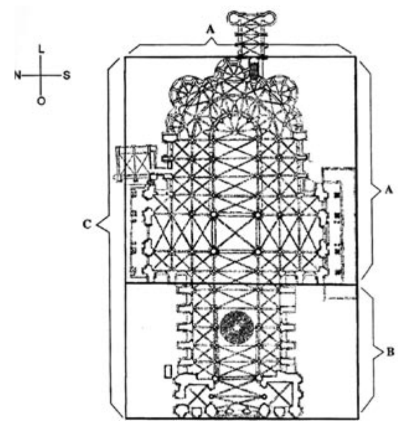


Ilustração 17: Planta da catedral: $\frac{A}{C} = \frac{B}{A} \cong 0{,}618$

Fonte: Klug (2002, p. 75).

Ilustração 18: Figuras vestidas do portal oeste

Fonte: Klug (2002, p. V).

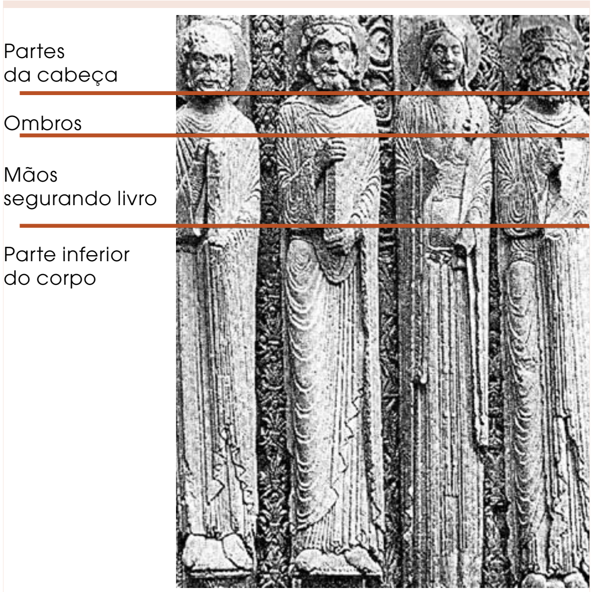


Ilustração 19: Retângulo áureo nas figuras vestidas do portal oeste

Fonte: Klug (2002, p. 76).

A proporção áurea também está presente na alta estrutura da catedral e na espessura de seus pilares.

Mesmo em anos recentes, ainda encontramos artistas e arquitetos que utilizam o retângulo áureo em seus projetos. Na Ilustração 20, temos a foto de uma residência de Paris, projetada pelo arquiteto Le Corbusier, em que há dois retângulos áureos, um deles representado pelo corpo inteiro da casa e o outro, disposto verticalmente, representado pela parte da casa à esquerda da escada.

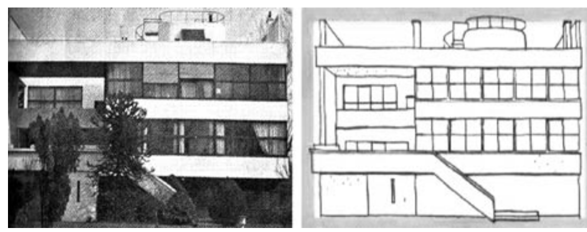


Ilustração 20: Residência da atualidade

Fonte: Ávila (1985, p. 9).

Podemos também citar o edifício-sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, na qual há três retângulos áureos dispostos horizontalmente.

Ilustração 21: Sede da ONU em Nova York

Fonte: Rocha (1999, p. 105).

Podemos perceber que, apesar das evidentes diferenças entre as construções apresentadas e do enorme espaço de tempo que as separa, essas construções são regidas estruturalmente pela proporção áurea.

9 A razão áurea e o corpo humano

O corpo humano tem sido o maior objeto de estudo sobre a existência do segmento áureo na natureza.

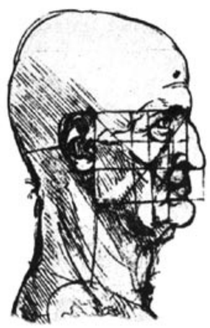


Ilustração 22: Desenho de Leonardo da Vinci
No desenho de Leonardo da Vinci representando um velho (provavelmente um auto-retrato), o artista sobrepôs ao esboço um quadrado dividido em retângulos que se aproximam do retângulo áureo.
Fonte: TV Cultura (2001).

Foi Leonardo da Vinci que chamou a razão áurea de divina proporção, utilizando-a inclusive na famosa *Monalisa* (ou *Gioconda*), de 1502: se construirmos um retângulo em torno de seu rosto, veremos que está na proporção áurea. Poderemos também subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal e teremos novamente a proporção áurea. Poderemos continuar a explorar esta proporção em várias outras partes do corpo.

Entre tantas outras aplicações, a "razão dourada" tem lugar reservado também nos consultórios de ortodontia. Atualmente, a busca de tratamentos odontológicos estéticos tem sido priorizada em diversas áreas da odontologia. Vários são os recursos utilizados em busca de um sorriso perfeito. Respeitando as regras da proporção áurea e os movimentos mandibulares do paciente, são utilizados instrumentos para verificar o posicionamento correto da arcada dentária (GOMES et al., 2003).

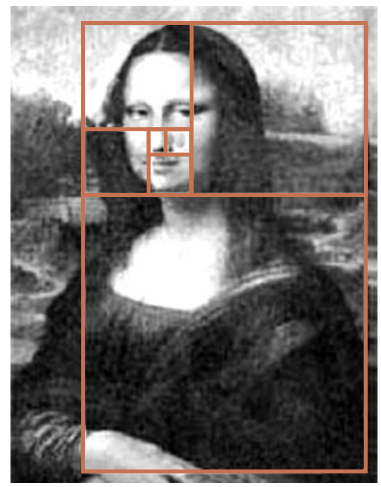


Ilustração 23: *Monalisa*
Observe como a linha dos olhos marca uma divisão áurea no comprimento total da face. E também a linha da boca é uma proporção áurea da distância entre a base do nariz e a extremidade do queixo.
Fonte: TV Cultura (2001).

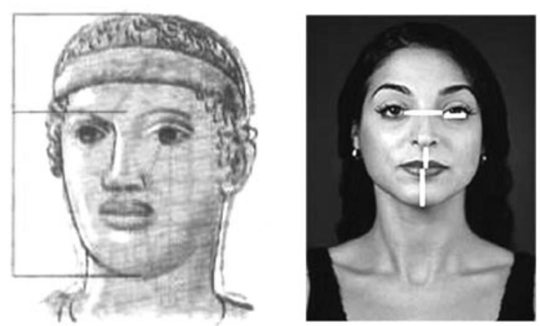


Ilustração 24: Proporções áureas no corpo humano – face
Fonte: TV Cultura (2001).

Observe a Ilustração 26: os quatro dentes frontais de cada lado da arcada superior – a parte mais visível do sorriso – estão numa relação dourada uns com os outros.

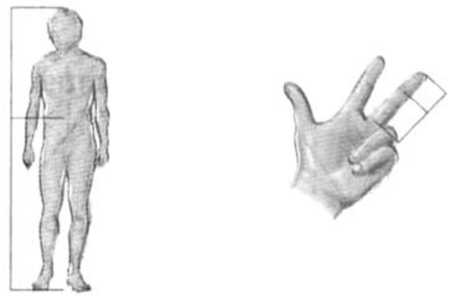


Ilustração 25: Proporções áureas no corpo humano
O umbigo marca um ponto áureo no comprimento do corpo. Na mão, o tamanho dos dedos está relacionado, de maneira áurea, com cada uma de suas articulações.
Fonte: Guimarães (1997, p. 65).

Ilustração 26: Arcada dentária
Fonte: TV Cultura (2001).

Nos últimos anos, tem sido discutida a relação da razão áurea com a beleza. Um corpo perfeitamente harmonioso traz relações áureas. Como já dissemos, o retângulo áureo é considerado a forma geométrica mais agradável à vista. Consideramos subjetivamente “belas” as formas que correspondem ao corte dourado, enquanto as que não se baseiam nele não nos agradam.

É claro que os conceitos de beleza que possuímos se relacionam a questões culturais. O que pode ser considerado belo para uma determinada civilização pode não ser tão belo para outra.

Para exemplificar isso, podemos verificar as relações áureas encontradas nas faces de dois atores que são considerados os expoentes da beleza cinematográfica: Tom Cruise e Sophia Loren. É interessante observar que a assimetria é uma das características principais dos seres humanos; por isso, foram estudadas as proporções apenas de um dos lados do rosto. Um retrato que seja espelhado, partindo do meio, pode transformar uma determinada figura pública num quase desconhecido.

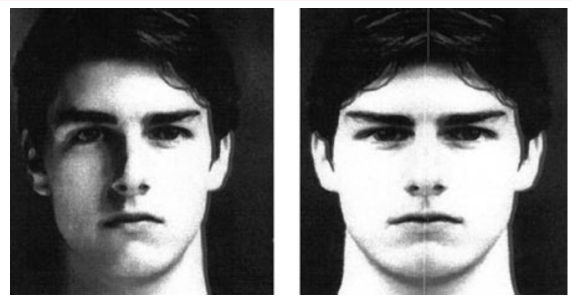


Ilustração 27: Tom Cruise
Fonte: Rocha (1999, p. 134).

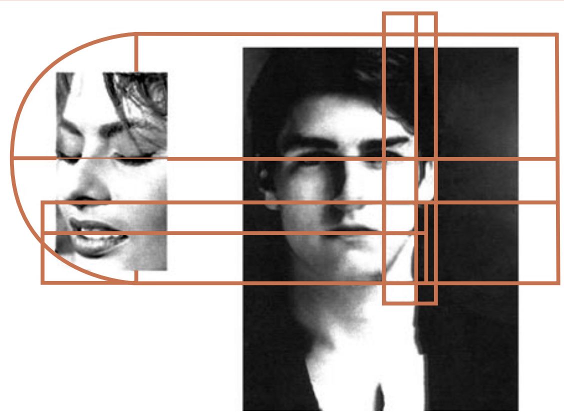


Ilustração 28: Relações áureas nos atores Tom Cruise e Sophia Loren
Fonte: Rocha (1999, p. 149).

A beleza desses atores pode não ser aceita por todos. Por se tratar de figuras públicas, sua beleza física pode ser contestada por aqueles que não os apreciam como atores. Contudo, é incontestável que o tipo de padrão apresentado se aproxima das proporções áureas.

10 A razão áurea e a natureza

O número áureo também é encontrado na natureza. Se sobrepusermos um pentágono estrelado à azaléia, veremos que ela está formada por proporções áureas.

O mesmo pode ser observado em outras flores como, por exemplo, na petúnia e no jasmim-estrela.

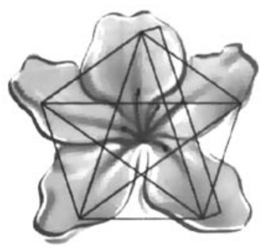


Ilustração 29: Azaléia
Fonte: Guimarães (1997, p. 65).

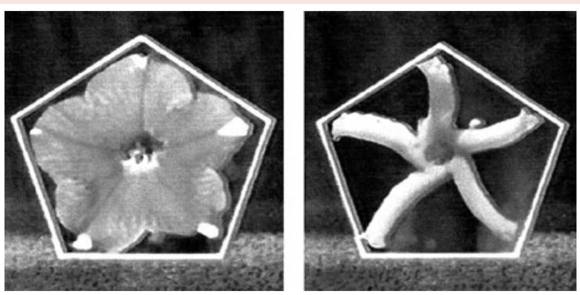


Ilustração 30: A petúnia e o jasmim-estrela
Fonte: Rocha (1999, p. 67).

As sementes do girassol ou as florezinhas que formam a configuração dos flósculos da margarida-do-campo estão dispostas em dois conjuntos de espirais sobrepostos, irradiando-se nos sentidos horário e anti-horário. Uma contagem do número de espirais, em cada um dos casos, fornece quase, invariavelmente, dois termos consecutivos de uma seqüência de Fibonacci, tais como 21 e 34 ou 34 e 55. (EVES, 1992)

Relações semelhantes são encontradas em várias outras plantas cujas folhas obedecem a um modelo de desenvolvimento em espiral.

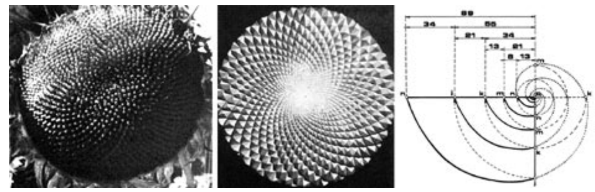


Ilustração 31: Girassol
Fonte: Doczi (1990, p. 4).

A espiral fornece também o padrão matemático para o princípio biológico que regula o crescimento das conchas: o tamanho aumenta, mas o formato não se altera.

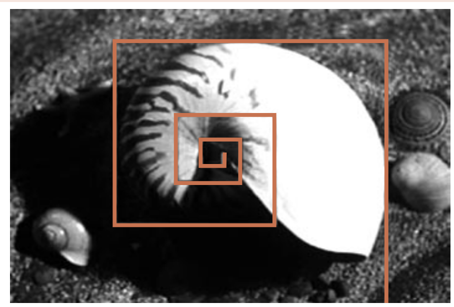


Ilustração 32: Concha do molusco náutilo
Fonte: Rocha (1999, p. 63).

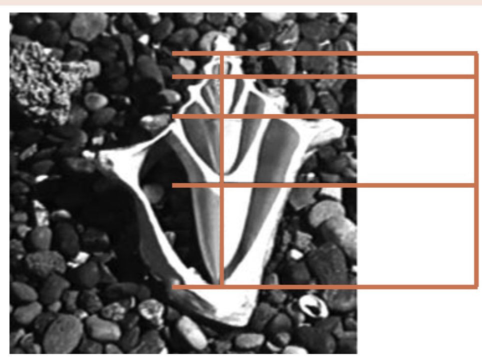


Ilustração 33: Concha do mar
Fonte: Rocha (1999, p. 68).

Além dos padrões retangulares, espirais e pentagonais, a razão áurea também pode ser encontrada numa progressão linear. Isso pode ser observado na estrutura da concha **do mar (Ilustração 33):**

E também no padrão de desenvolvimento de uma árvore:

Ilustração 34: Padrão de desenvolvimento de uma árvore

Fonte: Rocha (1999, p. 68).

Para finalizar, observemos a razão áurea presente nas proporções da anatomia de alguns animais.

Os peixes **da Ilustração 35** são das águas da costa canadense do Pacífico. Podemos observar a proporção áurea em suas silhuetas e articulações. Em alguns casos, como no salmão-prateado e no mangangá, a boca está no ponto de ouro da altura do corpo.

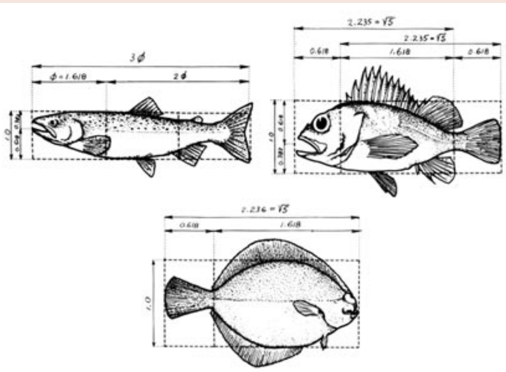


Ilustração 35: Salmão-prateado, mangangá e linguado

Fonte: Doczi (1990, p. 58).

Encontramos também as proporções da seção áurea nas formas das diferentes arraias, nas estruturas ósseas das rãs e dos cavalos, nos "olhos" da cauda do pavão que estão nos pontos de interseção de espirais áureas, em insetos como os besouros, as borboletas, as moscas, as libélulas, as abelhas, as vespas, as formigas, os grilos e os louva-a-deus (DOCZI, 1990).

11 Considerações finais

Como vimos, a razão áurea, que é conhecida desde o século V a.C. pelos pitagóricos, está sendo ainda hoje usada por diversos artistas. Essa proporção aparece em diversas situações no mundo à nossa volta, muitas vezes inesperadas.

Os padrões harmônicos são encontrados na natureza, utilizados nas artes, consciente e algumas vezes inconscientemente, contribuindo para a cultura do homem desde os tempos antigos.

Com os exemplos apresentados neste trabalho, esperamos ter contribuído para mostrar aos alunos e professores que a Matemática e, especificamente, a Geometria possuem várias aplicações nas diversas áreas do conhecimento e que, talvez com isso, nós, professores, possamos incentivar e motivar nossos alunos ao estudo da Geometria.

The golden ratio and the harmonic patterns in nature, arts and architecture

The ancient Greeks considered more harmonious and beautiful the rectangles that were in a ratio known as golden. The Greek temple Parthenon, built in the 5th century B.C., is maybe the most emblematic example of this ratio usage revealing their concern to make extremely harmonic architectonic works. This esthetic criterion crossed the centuries and is still adopted by some artists nowadays. Some examples of this ratio usage in nature, arts, architectonic works and in the human body are shown and examined in this work, showing some applications of Geometry in the world around us.

Key words: Golden ratio. Golden rectangle. Harmonic patterns. Pentagram.

Notas

1 A razão áurea com mais casas decimais é dada por 0,6180339 887498948482045868343656...

2 Gótico: estilo arquitetônico que nasceu na Europa no século XIII e que se caracteriza pelo arco ogival e a distribuição da luz através de vitrais.

Referências

ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 6, p. 9-14, 1985.

CARVALHO, J. P. Um problema de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 17, p. 4-9, 1990.

DOCZI, G. *O poder dos limites*: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura. 1. ed. São Paulo: Mercuryo, 1990.

EVES, H. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*: geometria. 1. ed. São Paulo: Atual, 1992. v. 3.

GOMES, P. N. et al. Reconstrução funcional e estética de dentes anteriores. In: FÓRUM CLÍNICO E CIENTÍFICO DA ODONTOLOGIA, 5., 2003, Varginha. *Anais*. Varginha: Universidade de Alfenas, 2003.

GUIMARÃES, J. L. Números camuflados. *Revista Superinteressante*, São Paulo, n. 10, p. 63-67, 1997.

KLUG, S. U. *Catedral de Chartres*: a geometria sagrada do cosmos. 1. ed. São Paulo: Madras, 2002.

ROCHA, A. J. F. *Estratégias de aplicação do segmento áureo no design*. 1999. Tese (Doutorado em Comunicação e Artes)-Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 1999.

TV CULTURA. *Arte & matemática*. São Paulo: TV Cultura, 2001. Disponível em: <http://www.tvcultura.com.br/artematematica/home.html>. Acesso em: 2 abr. 2005.

recebido em: 12 set. 2005 / aprovado em: 3 nov. 2005

Para referenciar este texto:

LAURO, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. *Exacta*, São Paulo, v. 3, p. 35-48, 2005.