Ingeniería y Ciencia
ISSN: 1794-9165
ingciencia@eafit.edu.co
Universidad EAFIT
Colombia

Granados Pinzón, Claudia; Olaya León, Wilson
K-álgebras finitas conmutativas con unidad
Ingeniería y Ciencia, vol. 12, núm. 24, julio-diciembre, 2016, pp. 31-49
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia

Ingeniería y Ciencia
ISSN:1794-9165 | ISSN-e: 2256-4314
ing. cienc., vol. 12, no. 24, pp. 31–49, julio-diciembre. 2016.
http://www.eafit.edu.co/ingciencia

$K-$álgebras finitas conmutativas con unidad

Claudia Granados Pinzón[1] y Wilson Olaya León[2]

Recepción: 04-04-2016 | Aceptación: 12-09-2016 | En línea: 15-11-2016

MSC: 13E10

doi:10.17230/ingciencia.12.24.2

Resumen

En este artículo presentamos un estudio sobre las $K-$álgebras finitas, es decir las $K-$álgebras conmutativas con unidad que son espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K. Estas son suma directa de $K-$álgebras finitas locales. Caracterizamos la $K-$álgebra finita local $\frac{K[x]}{(f(x))}$, mostramos que ciertas $K-$álgebras finitas son isomorfas y descomponemos la $K-$álgebra finita $\frac{K[x]}{(f(x))}$ en $K-$álgebras finitas locales.

Palabras clave: $K-$Álgebras de dimensión finita; suma directa; isomorfismos de álgebras.

[1] Universidad Industrial de Santander, cigranad@uis.edu.co,
ORCID:`http://orcid.org/0000.0003-0614-3187`, Bucaramanga, Colombia.
[2] Universidad Industrial de Santander, wolaya@uis.edu.co,
ORCID:`http://orcid.org/0000.0002-5881-1039` Bucaramanga, Colombia.

Finite Dimensional Commutative $K-$algebras with Unity

Abstract
This paper is devoted to the study of finite $K-$algebras i.e. the commutative $K-$algebras with unity that are finite dimensional vector space over a field K. A finite $K-$álgebra is direct sum of local finite $K-$algebras. We obtain a characterization of the local finite $K-$algebra $\frac{K[x]}{(f(x))}$, show that certain finite $K-$álgebras are isomorphic and discompose the finite $K-$algebra $\frac{K[x]}{(f(x))}$ in local finite $K-$algebras.

Key words: Finite-dimensional algebras; sum direct; isomorphism of algebras.

1 Introducción

Sea K un cuerpo. Una $K-$*álgebra* A con unidad es un conjunto dotado de dos operaciones $(A, +, \cdot)$ cumpliendo que:

1. es un anillo con unidad
2. es un $K-$espacio vectorial
3. para todo $\alpha \in K$ y para todos $a, b \in A$, $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Decimos que A es una $K-$*álgebra finita* si es una $K-$álgebra conmutativa con unidad y de dimensión finita como $K-$espacio vectorial. Denotaremos por $\dim_K A$ a su dimensión como $K-$espacio vectorial.

Un *homomorfismo de* $K-$*álgebras* es una aplicación lineal $\phi : A \to B$ entre dos $K-$álgebras tal que

$$\phi(1_A) = 1_B, \quad \text{y}$$

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \ \forall\ a, b \in A.$$

El homomorfismo estructural

$$\begin{array}{ccc} K & \to & A \\ 1_K & \mapsto & 1_A \end{array}$$

es inyectivo ya que K es cuerpo. Por lo tanto 1_K es parte libre en el $K-$espacio vectorial A y puedo extender $\{1_A\}$ a una base de A.

Si $\dim_K A = 2$, tomamos $\gamma \in A \setminus K$, luego $\{1_A, \gamma\}$ es parte libre en A y por tanto $\{1_A, \gamma\}$ es una base del $K-$espacio vectorial A. Además como $1 \cdot \gamma = \gamma \cdot 1$, se tiene que el anillo A es conmutativo. Sin embargo, para dimensiones superiores, las $K-$álgebras no son necesariamente conmutativas. Por ejemplo, el cuerpo de los números cuaterniónicos es una $\mathbb{R}-$álgebra de dimensión cuatro que no es conmutativa. En este artículo estamos interesados sólo en $K-$álgebras conmutativas.

Las $K-$álgebras finitas han sido un tema de investigación permanente en álgebra conmutativa, ver por ejemplo [1], [2], [3] y [4]. Nosotros presentamos aquí un estudio sistemático y con menos teoría especializada de ellas en comparación con las encontradas en los textos tradicionales de álgebra conmutativa [5], [6], [7], [8] y [9].

Las $K-$álgebras son usadas en áreas muy diversas como representaciones de grupo, teoría de códigos, la ecuación de Yang-Baxter, álgebras de Hopf y las álgebras de Frobenius [10]. Las $K-$álgebras no sólo son importantes en matemáticas, también encontramos en la literatura que se usan en otras áreas principalmente cuando el cuerpo K es el de los números complejos. Por ejemplo, las $\mathbb{C}^*-$álgebras son fundamentales en física cuántica. En [11] y [12] se estudian algunas $\mathbb{C}^*-$álgebras de dimensión finita donde se amplían resultados que se interpretan en mecánica cuántica. Además, en [13] y [14] se caracterizan ciertas $\mathbb{C}^*-$álgebras cuyos resultados son relevantes para los fundamentos de la teoría cuántica.

Existen, salvo isomorfismos, tres álgebras de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}, \qquad \mathbb{P} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2-1)}, \qquad \mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)}.$$

Esto es debido a que en una extensión de grado 2 de $\mathbb{R}$,

$$A = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+bx+c)}$$

se pueden dar tres casos según x^2+bx+c tenga dos raíces imaginarias, dos raíces reales distintas o una raíz doble. Los conjuntos $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ son, respectivamente, los números complejos, los números paracomplejos y los números duales, [2].

La teoría de funciones complejas es más estudiada que las otras dos. Algebraicamente, esto refleja el hecho de que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, mientras que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{D}$ no lo son pues $\mathbb{P}$ tiene divisores de cero y $\mathbb{D}$ tiene además elementos nilpotentes.

Las rectas proyectivas sobre las $\mathbb{R}-$álgebras $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ generan las tres geometrías clásicas del plano, Moebius, Laguerre y Minkowski, ver [15]. En general es poco lo que se conoce sobre las rectas proyectivas sobre las $K-$álgebras finitas. En [16] y [17] se estudió la interpretación proyectiva de estas métricas del plano real y en [1] se hizo una clasificación de todas las $\mathbb{R}-$álgebras finitas. [18] es un trabajo reciente sobre la geometría correspondiente a la $\mathbb{R}-$álgebra tridimensional $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^3)}$ pero en general estudiar la geometría sobre $\mathbb{R}-$álgebras finitas es un problema abierto.

Iniciamos este artículo probando que las $K-$álgebras finitas son suma directa de $K-$álgebras finitas locales. Luego mostramos que toda $K-$álgebra finita se descompone en forma única, salvo isomorfismos, en suma directa de $K-$álgebras finitas locales. Seguidamente caracterizamos la $K-$álgebra finita local $\frac{K[x]}{(f(x))}$, mostramos que ciertas $K-$álgebras finitas son isomorfas y descomponemos la $K-$álgebra finita $\frac{K[x]}{(f(x))}$ en $K-$álgebras finitas locales.

2 $K-$algebras finitas

Sea A una $K-$álgebra finita. Un ideal $\mathfrak{p}$ es primo si $\mathfrak{p} \neq (1)$ y si $ab \in \mathfrak{p}$ entonces $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$ y un ideal $\mathfrak{m}$ es maximal si $\mathfrak{m} \neq (1)$ y no existe ningún ideal $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$. Esto es equivalente a decir:

$$\mathfrak{p} \text{ es primo si y sólo si } A/\mathfrak{p} \text{ es un dominio de integridad,}$$
$$\mathfrak{m} \text{ es maximal si y sólo si } A/\mathfrak{m} \text{ es un cuerpo.}$$

Por tanto un ideal maximal es primo pero el recíproco no es cierto en general. El ideal cero es primo si y sólo si A es un dominio entero. Cada elemento de A que no es unidad está contenido en un ideal maximal [5].

A toda $K-$álgebra finita A podemos asociar un espacio topológico llamado el espectro primo de A, $Spec(A)$, que consiste en el conjunto de todos sus ideales primos. También asociamos a A el espacio $Max(A)$ que consiste en el conjunto de todos los ideales maximales de A. Existen $K-$álgebras finitas con exactamente un ideal maximal, por ejemplo, el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}$. Una $K-$álgebra finita A que tiene exactamente un ideal maximal se llama *$K-$álgebra finita local*.

Sea Σ un subconjunto parcialmente ordenado por una relación $\leq$. Las siguientes condiciones en Σ son equivalentes, [5]:

(i) Cada sucesión creciente $x_1 \leq x_2 \leq ...$ en Σ es estacionaria (es decir, existe n tal que $x_n = x_{n+1} = ...$).

(ii) Cada subconjunto no vacío de Σ tiene un elemento maximal.

Si Σ es el conjunto de submódulos de un módulo M, ordenado por la relación $\subseteq$, entonces (i) se denomina la *condición de cadena ascendente* y (ii) la *condición maximal*. Un módulo M que satisface una de estas dos condiciones equivalentes se denomina noetheriano (de Emmy Noether). Si Σ está ordenado por $\supseteq$, entonces (i) es la *condición de cadena descendente* y (ii) la *condición minimal*. Un módulo M que satisface una de estas dos condiciones equivalentes se denomina artiniano (de Emil Artin).

Toda $K-$álgebra finita A es artiniana y noetheriana, ver [5]. En la Proposición 2.2 vamos a obtener un primer resultado de estructura para este tipo de $K-$álgebras. Una prueba de esta proposición resulta como consecuencia del teorema de estructura de anillos de Artin, ver [5, Teorema 8.7]. Nosotros presentamos una demostración distinta y con menos teoría especializada. Para esto primero demostramos el Lema 2.1. Decimos que $e \in A$ es idempotente si $e^2 = e$.

Lema 2.1. Si A es una $K-$álgebra artiniana, entonces A es local si y sólo si los únicos idempotentes de A son 0 y 1.

Demostración. $\Rightarrow$: Si A es una $K-$álgebra local de ideal maximal $\mathfrak{m}$ y $e \in A$ es idempotente, entonces $e^2 = e$. Luego, $e - e^2 = e(1-e) = 0$ y tenemos dos casos:

(i) Si $e \in \mathfrak{m}$ entonces $1 - e \notin \mathfrak{m}$. Como A es local, $1 - e$ es inversible luego $e(1-e)(1-e)^{-1} = 0$ y por tanto $e = 0$.

(ii) Si $1 - e \in \mathfrak{m}$ entonces $e \notin \mathfrak{m}$. Como A es local, e es inversible entonces $e(1-e)e^{-1} = 0$. Por tanto $1 - e = 0$ y $e = 1$.

$\Leftarrow$: A es artiniana y sus únicos idempotentes son 0 y 1, sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A y sea $a \in A$ con $a \notin \mathfrak{m}$. Si a es no inversible, aA es un ideal propio de A entonces

$$aA \supset a^2A \supset \cdots \supset a^nA$$

es una sucesión decreciente de ideales y como A es artiniana, A es estacionaria. Luego existe r tal que $a^rA = a^{r+1}A$ entonces $a^r \in a^{r+1}A$ y existe $\lambda \in A$ tal que $a^r = \lambda a^{r+1}$. Por tanto, $a^r(1 - \lambda a) = 0$ y

$$0 = \lambda^r a^r (1-\lambda a) = \lambda^r a^r (1-\lambda a)(1+\lambda a+\cdots+(\lambda a)^{r-1}) = (\lambda a)^r(1-(\lambda a)^r).$$

Entonces $(\lambda a)^r$ es idempotente. Pero los únicos idempotentes de A son 0 y 1. Si

$$(\lambda a)^r = \lambda^r a^{r-1} a = 1$$

tenemos que a es inversible y esto es una contradicción. Si $(\lambda a)^r = 0$, entonces

$$\lambda^r a^r \in \mathfrak{m}.$$

Como $a \notin \mathfrak{m}$, $\lambda^r \in \mathfrak{m}$ pero $\mathfrak{m}$ es primo luego $\lambda \in \mathfrak{m}$. Lo cual es un absurdo pues $a^r(1 - \lambda a) = 0$ implica que $1 - \lambda a \in \mathfrak{m}$ por tanto $\lambda \notin \mathfrak{m}$.

En consecuencia, para todo $a \in A$ tal que $a \notin \mathfrak{m}$ tenemos que a es inversible y A es local. $\square$

Proposición 2.2. A es una $K-$álgebra finita si y sólo si A es una suma directa de $K-$álgebras finitas locales.

Demostración. $\Rightarrow$: Si $\dim_K A = 1$ como $K-$espacio vectorial, $A \simeq K$ luego A es local. Si $\dim_K A > 1$ y no tiene mas idempotentes que 0 y 1, por el Lema 2.1, A es una $K-$álgebra local finita. En caso contrario, existe $e \in A$ idempotente, $e \neq 1$ y $e \neq 0$. Entonces

(i) eA es un subanillo de A ya que eA es un ideal y por tanto es subanillo. Además el uno de eA es e pues $e(ea) = e^2a = ea$, para todo $ea \in eA$.

(ii) Todo ideal de eA es ideal de A. En efecto, sea $\mathfrak{p}$ ideal de eA luego para todo $\alpha \in \mathfrak{p}$ y para todo $a \in A$ se cumple que $ea\alpha \in \mathfrak{p}$. Note que $\alpha = eb$, $b \in A$. Entonces $\mathfrak{p}$ es ideal de A porque para todo $\alpha \in \mathfrak{p}$ y para todo $a \in A$, se tiene que

$$a\alpha = aeb = ae^2b = eaeb = ea\alpha \in \mathfrak{p}.$$

Además, como A es artiniana, eA es artiniana ya que cualquier sucesión decreciente de ideales de eA es una sucesión decreciente de ideales de A y por tanto estacionaria.

(iii) eA y $(1-e)A$ son subespacios vectoriales de A y $e(1-e) = 0$ entonces para todo $a \in A$, $a = ea + (1-e)a$ luego $A = eA + (1-e)A$ suma como $K-$espacios vectoriales. Además si $\beta \in eA \cap (1-e)A$, $\beta = ea = (1-e)b$ para $a, b \in A$ entonces $\beta = ea = e^2a = e(1-e)b = 0$.
En consecuencia, A es suma directa de eA y $(1-e)A$ como $K-$espacios vectoriales y tenemos el isomorfismo de $K-$espacios vectoriales

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A & \to & eA \times (1-e)A \\ & a & \mapsto & (ea, (1-e)a) \end{array}.$$

Tomando en $eA \times (1-e)A$ la estructura producto

$$\varphi(a)\varphi(b) = (ea, (1-e)a)(eb, (1-e)b) = (eab, (1-e)ab) = \varphi(ab)$$

pues $1-e$ es también idempotente. Luego

$$A \simeq eA \times (1-e)A$$

como $K-$álgebras.
Puesto que eA y $(1-e)A$ son subespacios no nulos y $\dim_K A$ es finita, se tiene que

$$\dim_K eA < \dim_K A \quad \text{y} \quad \dim_K (1-e)A < \dim_K A$$

es decir las dimensiones de eA y $(1-e)A$ son menores que la dimensión de A.

Si eA y $(1-e)A$ no tienen más elementos idempotentes que 0 y 1, por el Lema 2.1, eA y $(1-e)A$ son $K-$álgebras locales finitas. De lo contrario y como las dos álgebras son de dimensión menor que la de A seguimos el proceso inductivamente hasta obtener el resultado deseado.

$\Leftarrow$: Se comprueba sin dificultad. □

En el ítem (ii) de la demostración de la Proposición 2.2, observe que si $\mathfrak{p} \in Spec(eA)$, no necesariamente $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. Por ejemplo, sea $A = \mathbb{R}^3$ y $e = (1,1,0)$ entonces $eA = \{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$. Un ideal primo de eA es $\mathfrak{m}_{eA} = \{(a,0,0) : a \in \mathbb{R}\}$ y $\mathfrak{m}_{eA}$ no es ideal primo en A pues $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ no pertenecen a $\mathfrak{m}_{eA}$ y su producto es cero.

Consideremos la $K-$álgebra finita $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ donde cada A_i es una $K-$álgebra finita local con ideal maximal M_i, $i = 1, \ldots, r$. El Lema 2.3 presenta un isomorfismo entre cada A_i y el correspondiente anillo de fracciones o localización A_{M_i}, $M_i \in Max(A)$, definido a continuación:

Diremos que un subconjunto S del anillo A es un sistema multiplicativo cuando $1 \in S$ y $s,t \in S \Rightarrow st \in S$. Se define en $A \times S$ la relación de equivalencia

$$(f,g) \sim (u,v) \;\Leftrightarrow\; (fv-gu)s = 0 \text{ para algún } s \in S.$$

En el conjunto cociente $A_S := A \times S/\sim$ denotamos a la clase de equivalencia de (f,g) como $\frac{f}{g}$ y se definen las operaciones suma y producto como si fueran fracciones de $\mathbb{Q}$:

$$\frac{f}{g} + \frac{u}{v} := \frac{fv+gu}{gv} \qquad \text{y} \qquad \frac{f}{g}\frac{u}{v} := \frac{fu}{gv}.$$

Estas operaciones están bien definidas y hacen de A_S un anillo conmutativo con unidad, donde el cero es $\frac{0}{s}$, para $s \in S$ y la unidad es $\frac{s}{s}$, para $s \in S$. Más aún, se tiene un homomorfismo canónico de anillos $\varphi : A \to A_S$ dado por $\varphi(f) := \frac{f}{1}$ que en general no es inyectivo. Al anillo A_S le llamamos *anillo de fracciones* o *localización* de A por S.

Lema 2.3. Sea $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ una $K-$álgebra finita donde cada A_i es una $K-$álgebra local finita. Para $i = 1, \ldots, r$ sea $\mathfrak{m}_i$ el ideal maximal de A_i. Entonces

(1) $Max(A) = \{M_1, \ldots, M_r\}$ donde $M_i = \prod_{j=1}^{r} m_j$ con $m_j = A_j$, para todo $j \neq i$ y $m_i = \mathfrak{m}_i$.

(2) Para todo $i = 1, \ldots, r$ se tiene que $A_{M_i} \simeq A_i$.

Demostración. (1) Es consecuencia de que los ideales maximales de una suma directa de r anillos tienen la forma M_i para todo $i = 1, ..., r$. Ver [1, Lema 1.2.6].

(2) Para todo $i = 1, \ldots, r$,

$$A_{M_i} = \left\{ \frac{(a_1, \ldots, a_r)}{(b_1, \ldots, b_r)} : (b_1, \ldots, b_r) \notin M_i \right\} = \left\{ \frac{(a_1, \ldots, a_r)}{(b_1, \ldots, b_r)} : b_i \notin \mathfrak{m}_i \right\}.$$

Como A_i es local, b_i es inversible y la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \phi_i : & A_{M_i} & \to & A_i \\ & \frac{(a_1,\ldots,a_r)}{(b_1,\ldots,b_r)} & \mapsto & b_i^{-1} a_i \end{array}$$

es un homomorfismo de anillos. Note que ϕ_i es inyectiva ya que si $b_i^{-1} a_i = 0$, entonces existe $(0, \ldots, b_i^{-1}, \ldots, 0) \notin M_i$ tal que

$$(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_r)(0, \ldots, b_i^{-1}, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0)$$

y esto equivale a que

$$\frac{(a_1, \ldots, a_r)}{(b_1, \ldots, b_r)} = (0, \ldots, 0)$$

para $\frac{(a_1,\ldots,a_r)}{(b_1,\ldots,b_r)} \in A_{M_i}$. Además, ϕ_i es sobreyectiva porque, para todo $a_i \in A_i$, existe $\frac{(a_i,\ldots,a_i)}{(1,\ldots,1)} \in A_{M_i}$ tal que $\phi_i \left(\frac{(a_i,\ldots,a_i)}{(1,\ldots,1)} \right) = a_i$. $\square$

La siguiente proposición muestra que una $K-$álgebra finita se descompone en forma única, salvo isomorfismos, en suma directa de $K-$álgebras finitas locales.

Proposición 2.4. Sean $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ y $B = \bigoplus_{j=1}^{s} B_j$ dos $K-$álgebras finitas donde A_i, B_j son $K-$álgebras locales finitas. Entonces $A \simeq B$ como $K-$álgebras si y sólo si $r = s$ y, después de reordenar los B_j, para todo $i = 1, \ldots, r$ se tiene que $A_i \simeq B_i$ como $K-$álgebras.

Demostración. $\Rightarrow$: Como $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$, por el Lema 2.3, $Max(A) = \{M_1, \ldots, M_r\}$ y para todo $i = 1, \ldots, r$ se tiene $A_{M_i} \simeq A_i$. Además, por hipótesis, $A \simeq \bigoplus_{j=1}^{s} B_j$ luego por el Lema 2.3, $Max(A) = \{N_1, \ldots, N_s\}$ y para todo $j = 1, \ldots, s$ se tiene $A_{N_j} \simeq B_j$. Entonces para todo i, existe j tal que $M_i = N_j$. Por tanto después de reordenar a los B_j, para todo $i = 1, \ldots, r$,

$$A_i \simeq A_{M_i} \simeq A_{N_i} \simeq B_i.$$

$\Leftarrow$: Si para todo $i = 1, \ldots, r$ se tiene que ϕ_i es el isomorfismo entre A_i y B_i, entonces

$$\prod_{i=1}^{r} \phi_i : \prod_{i=1}^{r} A_i \to \prod_{i=1}^{r} B_i$$

es un isomorfismo. $\square$

En consecuencia, por la Proposición 2.4, estudiar la estructura de las $K-$álgebras finitas se reduce a estudiar la estructura de las $K-$álgebras locales finitas.

3 Caracterizaciones e isomorfismos

El ejemplo más simple de las $K-$álgebras finitas es el de las $K-$álgebras $A = \frac{K[x]}{(f(x))}$ caracterizadas porque existe $u \in A$ tal que $1, u, \ldots, u^{n-1}$ es base de A como $K-$espacio vectorial. Obviamente no toda $K-$álgebra finita es de este tipo, por ejemplo $\frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x,y)^2}$ ya que todo elemento al cuadrado de esta álgebra es cero, luego no puede existir $u \in A$ tal que $1, u, u^2$ sea base de A como $K-$espacio vectorial.

Lema 3.1. La $K-$álgebra finita $A = \frac{K[x]}{(f(x))}$ es local si y sólo si existe $p(x) \in K[x]$, polinomio irreducible, tal que $f(x) = p(x)^n$. En este caso su ideal maximal es $(p(\overline{x}))$ y el cuerpo residual es $\frac{K[x]}{(p(x))}$.

Demostración. Los elementos de $A = \frac{K[x]}{(f(x))}$ se escriben de forma única como $g(\overline{x})$ con $g(x) \in K[x]$ y grado(g) <grado(f).

$\Rightarrow$: Si $f(x)$ no es potencia de un irreducible, en particular $f(x)$ no es irreducible, entonces $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ donde $mcd(f_1, f_2) = 1$ por tanto existen $g_1, g_2 \in K[x]$ tales que $g_1f_1 + g_2f_2 = 1$ luego $1 - g_1f_1 = g_2f_2$ y

$$g_1(\overline{x})f_1(\overline{x})(1 - g_1(\overline{x})f_1(\overline{x})) = g_1(\overline{x})g_2(\overline{x})f_1(\overline{x})f_2(\overline{x}) = 0.$$

En consecuencia, $g_1(\overline{x})f_1(\overline{x})$ es idempotente y note que $g_1(\overline{x})f_1(\overline{x}) \neq 0$ y $g_1(\overline{x})f_1(\overline{x}) \neq 1$. Pues de lo contrario, si $g_1(\overline{x})f_1(\overline{x}) = 0$, $g_2(\overline{x})f_2(\overline{x}) = 1$ es decir $f_2(\overline{x})$ es inversible pero esto es absurdo pues $f_2(\overline{x})$ es un divisor de cero de A. Por la misma razón $g_1(\overline{x})f_1(\overline{x}) \neq 1$. Usando el Lema 2.1 tenemos que A no es local y esto es una contradicción que proviene de suponer que f no es irreducible.

$\Leftarrow$: Si $g(\overline{x}) \in A$ es idempotente entonces $g(\overline{x})(1 - g(\overline{x})) = 0$ y esto equivale a que $p(x)^n$ divide a $g(x)(1 - g(x))$ luego

$$p(x)|g(x)(1 - g(x)).$$

Por tanto, $p(x)|g(x)$ o $p(x)|(1-g(x))$ pero no a los dos a la vez pues $p(x) \nmid 1$. Si $p(x)|g(x)$ entonces $p(x) \nmid (1-g(x))$ y por tanto $p(x)^n|g(x)$ luego $g(\overline{x}) = 0$ y si $p(x)|(1 - g(x))$ entonces $p(x) \nmid g(x)$ y por tanto $p(x)^n|(1 - g(x))$ luego $1 - g(\overline{x}) = 0$ y $g(\overline{x}) = 1$. En consecuencia, por el Lema 2.1, A es local. Además como $p(x)$ es irreducible, el ideal $(p(x))$ es maximal y contiene a $(p(x)^n)$. Luego $(p(\overline{x}))$ es el ideal maximal de A y su cuerpo residual es $\frac{K[\overline{x}]}{(p(\overline{x}))} \simeq \frac{K[x]}{(p(x))}$. $\square$

Lema 3.2. Sean $f(x), g(x) \in K[x]$ tales que $mcd(f, g) = 1$. Entonces existe un isomorfismo de $K-$álgebras

$$\frac{K[x]}{(f(x)g(x))} \simeq \frac{K[x]}{(f(x))} \times \frac{K[x]}{(g(x))}$$

dotando al producto cartesiano de estructura de $K-$álgebra con las operaciones suma y producto componente a componente.

Demostración. Para todo $f(x) \in K[x]$, sea $\varphi_f : \ K[x] \ \rightarrow \ \frac{K[x]}{(f(x))}$ el homomorfismo natural definido por $\varphi_f(p(x)) = p(x) + (f(x))$. Entonces

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_f \times \varphi_g : & K[x] & \rightarrow & \frac{K[x]}{(f(x))} \times \frac{K[x]}{(g(x))} \\ & p(x) & \mapsto & \left([p(x)]_{f(x)}, [p(x)]_{g(x)}\right) \end{array}$$

es homomorfismo de $K-$álgebras y $Ker(\varphi_f \times \varphi_g) = (fg)$ ya que $h \in Ker(\varphi_f \times \varphi_g)$ si y sólo si $h \in Ker(\varphi_f) \cap Ker(\varphi_g)$ y $Ker(\varphi_f) \cap Ker(\varphi_g) = (f) \cap (g) = (fg)$ pues $mcd(f,g) = 1$. Además, $\varphi_f \times \varphi_g$ es sobreyectiva. En efecto, sea $\left([r(x)]_{f(x)}, [s(x)]_{g(x)}\right) \in \frac{K[x]}{(f(x))} \times \frac{K[x]}{(g(x))}$, como f y g son primos entre si, existen $c_1, c_2 \in K[x]$ tales que $c_1 f + c_2 g = 1$, en consecuencia $\varphi_f(rc_2 g + sc_1 f) = rc_2 g + (f) = r + (f) = [r]_{f(x)}$ y $\varphi_g(rc_2 g + sc_1 f) = sc_1 f + (g) = s + (g) = [s]_{g(x)}$. $\square$

La proposición siguiente presenta la descomposición en productos de $K-$álgebras locales y se demuestra usando iterativamente la prueba del Lema 3.2.

Proposición 3.3. Si $f(x) = f_1(x)^{n_1} \cdots f_r(x)^{n_r} \in K[x]$ es un producto de factores irreducibles distintos entonces

$$\frac{K[x]}{(f(x))} \simeq \frac{K[x]}{(f_1(x)^{n_1})} \times \cdots \times \frac{K[x]}{(f_r(x)^{n_r})}.$$

Lema 3.4. (1) Un homomorfismo de $K-$álgebras $\phi : K[x] \to K[x]$ queda unívocamente determinado por $\phi(x) = h(x) \in K[x]$.

(2) ϕ es un isomorfismo de $K-$álgebras si y sólo si $\phi(x) = ax + b$ con $a, b \in K$ y $a \neq 0$.

Demostración. (1) Se sigue de que todo homomorfismo de álgebras está caracterizado por lo que le hace a sus generadores, en este caso a x.

(2) Es inmediato, pues todo isomorfismo de $K[x]$ en $K[x]$ preserva la graduación. $\square$

Definición 3.5. $p(x)$ es equivalente a $q(x)$, $p(x) \sim q(x)$, si y sólo si existen $a, b \in K$ con $a \neq 0$ tales que $q(x) = p(ax + b)$.

Proposición 3.6. (1) Si $K = \mathbb{R}$, entonces los polinomios irreducibles de $K[x]$ son equivalentes a x o $x^2 + 1$.

(2) Si K es algebraicamente cerrado, entonces para todo $p(x)$ irreducible, $p(x) \sim x$.

Demostración. (1) En $\mathbb{R}[x]$, los polinomios irreducibles son lineales de la forma $p(x) = ax + b$ con $a \neq 0$ o de grado dos de la forma $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$. Si $p(x) = ax + b$ con $a \neq 0$, por definición, $p(x) \sim x$. Además, note que $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$ es equivalente a que $p(x) = (x - a')^2 + (b')^2$ con $b' \neq 0$. Luego,

$$p(x) = (x - a')^2 + (b')^2 = (\frac{x}{b'} - \frac{a'}{b'})^2 + 1 \sim x^2 + 1.$$

(2) Si K es algebraicamente cerrado, los polinomios irreducibles $p(x)$ son lineales y por definición, $p(x) \sim x$. $\square$

Lema 3.7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $p(x) \sim q(x)$ entonces

$$\frac{K[x]}{(p(x)^n)} \simeq \frac{K[x]}{(q(x)^n)}.$$

Demostración. Como $p(x) \sim q(x)$, existen $a, b \in K$ con $a \neq 0$ tales que $q(x) = p(ax + b)$. Sea ϕ el homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \phi: & K[x] & \to & \frac{K[x]}{(p(ax+b)^n)} \\ & x & \mapsto & [ax + b] \end{array}$$

$Ker(\phi) = (p(x)^n)$ ya que para $h(x) \in K[x]$, $\phi(h(x)) = [0] \Leftrightarrow h(ax + b) \in (p(ax + b)^n) \Leftrightarrow h(x) \in (p(x)^n)$. Además, ϕ es sobreyectiva. Sea $[h(x)] \in \frac{K[x]}{(p(ax+b)^n)}$, por el Lema 3.4, existe $\widetilde{h}(x) \in K[x]$ tal que $h(x) = \widetilde{h}(ax + b)$ entonces $\phi(\widetilde{h}(x)) = [\widetilde{h}(ax + b)] = [h(x)]$. $\square$

El recíproco del Lema 3.7 no es cierto incluso bajo la hipótesis de que $p(x)$ y $q(x)$ sean irreducibles como lo prueba el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.8. Sean $A = \frac{\mathbb{Z}/(3)[x]}{(x^3+x^2+2)}$ y $B = \frac{\mathbb{Z}/(3)[y]}{(y^3+2y^2+1)}$. Entonces $\{1, \overline{x}, \overline{x}^2\}$ y $\{1, \overline{y}, \overline{y}^2\}$ son bases de A y B respectivamente como espacios vectoriales. Definimos el homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\phi}: & \mathbb{Z}/(3)[x] & \to & \frac{\mathbb{Z}/(3)[y]}{(y^3+2y^2+1)} \\ & x & \mapsto & 2\overline{y}^2 + 1 \end{array}$$

Note que $\widehat{\phi}(x^2) = 2\overline{y}^2 + 2\overline{y}$ y $\widehat{\phi}(x^3 + x^2 + 2) = 0$.
Como $(x^3 + x^2 + 2) \subset Ker(\widehat{\phi})$, $\widehat{\phi}$ induce un homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \frac{\mathbb{Z}/(3)[x]}{(x^3+x^2+2)} & \to & \frac{\mathbb{Z}/(3)[y]}{(y^3+2y^2+1)} \\ & \overline{x} & \mapsto & 2\overline{y}^2 + 1 \end{array}$$

Veamos que ϕ es un isomorfismo. En efecto, ϕ es inyectivo ya que si $\phi(a + b\overline{x} + c\overline{x}^2) = a + b(2\overline{y}^2 + 1) + c(2\overline{y}^2 + 2\overline{y}) = a + b + 2c\overline{y} + (2b + 2c)\overline{y}^2 = 0$ entonces $a + b = 0$, $c = 0$ y $b + c = 0$. Luego $a = b = c = 0$ y ϕ es inyectiva. Puesto que las álgebras tienen la misma dimensión, como espacios vectoriales, entonces se tiene el isomorfismo ϕ.
Observe que $x^3 + x^2 + 2 \nsim y^3 + 2y^2 + 1$ ya que no existe una transformación lineal que lleve un polinomio en el otro.

Corolario 3.9. (1) Si $f(x) = p_1(x)^{n_1} \cdots p_r(x)^{n_r} \in K[x]$ es producto de factores irreducibles distintos y $p_i(x) \sim q_i(x)$ para todo $i = 1, \ldots, r$ entonces

$$\frac{K[x]}{(f(x))} \simeq \frac{K[x]}{(q_1(x)^{n_1})} \times \cdots \times \frac{K[x]}{(q_r(x)^{n_r})}$$

(2) En particular, si $f(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_r)^{n_r}$ y K es algebraicamente cerrado entonces

$$\frac{K[x]}{(f(x))} \simeq \frac{K[x]}{(x^{n_1})} \times \cdots \times \frac{K[x]}{(x^{n_r})}$$

Demostración. (1) Se tiene por la Proposición 3.3 y el Lema 3.7.

(2) Puesto que $x - a_i \sim x$ y por el item (1) tenemos el isomorfismo. □

Corolario 3.10. Sea $K = \mathbb{R}$.

(1) Si $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ entonces

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(((x - a)^2 + b^2)^n)} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{((x^2 + 1)^n)}.$$

(2) Si $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces existen $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s$ tales que

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(f(x))} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^{n_1})} \times \cdots \times \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^{n_r})} \times \frac{\mathbb{R}[x]}{((x^2 + 1)^{m_1})} \times \cdots \times \frac{\mathbb{R}[x]}{((x^2 + 1)^{m_s})}.$$

Demostración. (1) Puesto que $(x-a)^2+b^2 \sim x^2+1$, por el Lema 3.7 tenemos el isomorfismo.

(2) Por la Proposición 3.6, existen $n_1,\ldots,n_r,m_1,\ldots,m_s \in \mathbb{R}$ tales que $f(x)=(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_r)^{n_r}((x-b_1)^2+c_1^2)^{m_1}\cdots((x-b_s)^2+c_s^2)^{m_s}$ y por la Proposición 3.3 y el item (1) se sigue el resultado. $\square$

Observe que se presenta el problema de la unicidad de la descomposición. En el caso de cuerpos algebraicamente cerrados la descomposición es única y queda determinada por los números $n_1,\ldots,n_r$ es decir para todo $f(x)\in K[x]$ existen $n_1,\ldots,n_r$ únicos con $\frac{K[x]}{(f(x))}\simeq\frac{K[x]}{(x^{n_1})}\times\cdots\times\frac{K[x]}{(x^{n_r})}$. En el caso real la situación es la misma como veremos mas adelante.

Lema 3.11. Para todos m,n enteros positivos,

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^n)}\not\simeq\frac{\mathbb{R}[x]}{((x^2+1)^m)}$$

Demostración. Por el Lema 3.1, el cuerpo residual de la $\mathbb{R}-$álgebra $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^n)}$ es $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x)}\simeq\mathbb{R}$ y el cuerpo residual de $\frac{\mathbb{R}[x]}{((x^2+1)^m)}$ es $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}\simeq\mathbb{C}$. Luego las álgebras no son isomorfas. $\square$

Lema 3.12. Si $p(x)$ y $q(x)$ son elementos irreducibles de $\mathbb{R}[x]$ las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) $p(x)\sim q(x)$.

(2) $\frac{\mathbb{R}[x]}{(p(x)^n)}\simeq\frac{\mathbb{R}[x]}{(q(x)^n)}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

(3) $\frac{\mathbb{R}[x]}{(p(x))}\simeq\frac{\mathbb{R}[x]}{(q(x))}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se tiene por el Lema 3.7.

(2) $\Rightarrow$ (3) Inmediato tomando $n=1$. Entonces $\frac{\mathbb{R}[x]}{(p(x))}\simeq\frac{\mathbb{R}[x]}{(q(x))}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Puesto que $p(x)$ y $q(x)$ son irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ entonces $p(x)\sim x$ o $p(x)\sim x^2+1$, y $q(x)\sim x$ o $q(x)\sim x^2+1$. Como $\frac{\mathbb{R}[x]}{(p(x))}\simeq\frac{\mathbb{R}[x]}{(q(x))}$

y en virtud del Lema 3.11, tenemos dos casos:

(i) $p(x) \sim x$ y $q(x) \sim x$, entonces $p(x) \sim q(x)$.

(ii) $p(x) \sim x^2+1$ y $q(x) \sim x^2+1$, entonces $p(x) \sim q(x)$. $\square$

En consecuencia, para $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, existen $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s$ únicos tales que $\frac{\mathbb{R}[x]}{(f(x))} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^{n_1})} \times \cdots \times \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^{n_r})} \times \frac{\mathbb{R}[x]}{((x^2+1)^{m_1})} \times \cdots \times \frac{\mathbb{R}[x]}{((x^2+1)^{m_s})}$. En el caso general lo que se puede decir es que:

Lema 3.13. Sean $p(x)$ y $q(x)$ elementos irreducibles de $K[x]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{K[x]}{(p(x)^n)} \simeq \frac{K[x]}{(q(x)^n)}$ si y sólo si $\frac{K[x]}{(p(x))} \simeq \frac{K[x]}{(q(x))}$.

Demostración. $\Rightarrow$: Por el Lema 3.1, $\frac{K[x]}{(p(x)^n)}$ y $\frac{K[x]}{(q(x)^n)}$ son álgebras locales con cuerpos residuales $\frac{K[x]}{(p(x))}$ y $\frac{K[x]}{(q(x))}$ respectivamente. Además como $\frac{K[x]}{(p(x)^n)} \simeq \frac{K[x]}{(q(x)^n)}$ entonces $\frac{K[x]}{(p(x))} \simeq \frac{K[x]}{(q(x))}$.

$\Leftarrow$: Sea

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \frac{K[x]}{(p(x))} & \to & \frac{K[x]}{(q(x))} \\ & x + (p(x)) & \mapsto & h(x) + (q(x)) \\ & f(x) + (p(x)) & \mapsto & f(h(x)) + (q(x)) \end{array}$$

Por el Lema 3.1, $\frac{K[x]}{(p(x)^n)}$ y $\frac{K[x]}{(q(x)^n)}$ son álgebras locales con cuerpos residuales $\frac{K[x]}{(p(x))}$ y $\frac{K[x]}{(q(x))}$, y con ideales maximales $(p(\overline{x}))$ y $(q(\overline{x}))$ respectivamente. Por hipótesis φ es un isomorfismo, es decir los cuerpos residuales de las álgebras locales son isomorfos y por tanto los ideales maximales también lo son. En consecuencia, $\frac{K[x]}{(p(x)^n)} \simeq \frac{K[x]}{(q(x)^n)}$. $\square$

El ejemplo 3.8 muestra que $K[x]/(p(x)) \simeq K[x]/(q(x))$ no implica que $p(x) \sim q(x)$ entonces la descomposición que puede obtenerse $f(x) = p_1(x)^{n_1}...p_r(x)^{n_r}$ en componentes irreducibles induce un isomorfismo

$$\frac{K[x]}{(f(x))} \simeq \frac{K[x]}{(p_1(x)^{n_1})} \times \cdots \times \frac{K[x]}{(p_r(x)^{n_r})}$$

pero $p_1(x), \ldots, p_r(x)$ no están unívocamente determinados salvo transformaciones lineales.

4 Conclusiones

Las $K-$álgebras finitas, es decir las $K-$álgebras conmutativas con unidad de dimensión finita como $K-$espacio vectorial, han sido un tema muy estudiado en álgebra conmutativa, ver por ejemplo [1], [2], [3] y [4], y en este artículo hemos hecho un estudio sistemático y sencillo de ellas en comparación con los encontrados en los textos tradicionales de álgebra conmutativa [5], [6], [7], [8] y [9]. Iniciamos probando que las $K-$álgebras finitas son suma directa de $K-$álgebras locales finitas. Luego caracterizamos la $K-$álgebra local finita $\frac{K[x]}{(f(x))}$, mostramos que ciertas $K-$álgebras finitas son isomorfas e hicimos una descomposición de la $K-$álgebra finita $\frac{K[x]}{(f(x))}$ en $K-$álgebras locales finitas.

Las $K-$álgebras son usadas en áreas muy diversas como representaciones de grupo, teoría de códigos, la ecuación de Yang-Baxter, álgebras de Hopf y las álgebras de Frobenius [10]. Las $K-$álgebras no sólo son importantes en matemáticas, también se usan en otras áreas. Por ejemplo, las $\mathbb{C}^*-$álgebras son fundamentales en física cuántica. En [11], [12], [13] y [14] se estudian algunas $\mathbb{C}^*-$álgebras donde se amplían resultados que se interpretan en la teoría cuántica.

Las rectas proyectivas sobre las $\mathbb{R}-$álgebras finitas de dimensión dos, $\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}$, $\mathbb{P} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2-1)}$ y $\mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)}$ generan las tres geometrías clásicas del plano, Moebius, Laguerre y Minkowski, ver [15]. [18] es un trabajo reciente sobre la geometría correspondiente a la $\mathbb{R}-$álgebra tridimensional $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^3)}$ pero en general estudiar la geometría sobre las $\mathbb{R}-$álgebras finitas es un problema abierto.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los árbitros de la revista por sus comentarios y sugerencias. Agradecemos al profesor José Manuel Aroca Hernandez-Roz de la Universidad de Valladolid (España) por sus enseñanzas y colaboración constante en la realización de este trabajo.

Referencias

[1] C. Granados-Pinzón, *Álgebras finitas sobre un cuerpo. La recta proyectiva.* Tesis doctoral Universidad de Valladolid. Director: J.M. Aroca, 2015. [Online]. Available: http://uvadoc.uva.es/handle/10324/12347 33, 34, 39, 47

[2] G. M. Morales, *Métricas, compactificaciones y extensiones del cuerpo real.* Tesis doctoral Universidad de Valladolid. Director: J.M. Aroca, 1996. [Online]. Available: https://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=12772 33, 47

[3] B. Poonen, *Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field*, K. Lauter, Kristin; Ribet, Ed. American Mathematical Society, 2006. [Online]. Available: http://bookstore.ams.org/conm-463/124 33, 47

[4] R. Vale, *Topics in finite-dimensional algebras.* Cornell University, 2009. [Online]. Available: http://www.math.cornell.edu/~rvale/fdalgebras.pdf 33, 47

[5] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa.* Barcelona: Editorial Reverté S. A., 1980. 33, 34, 35, 47

[6] N. Bourbaki, *Commutative algebra.* Paris: Hermann, Publishers in Arts and Science, 1989. 33, 47

[7] D. Eisenbud, *Commutative Algebra, with a view toward Algebraic Geometry.* New York: Springer-Verlag, 1995. 33, 47

[8] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 33, 47

[9] J. A. Navarro, *Algebra conmutativa básica.* Badajoz: Universidad de Extremadura, 1997. 33, 47

[10] W. Murray, "Nacayama automorphisms of Frobenius algebras," *Journal of algebra*, vol. 269, no. 2, pp. 599–609, 2003. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1016/S0021-8693(03)00465-4 33, 47

[11] A. J. Lindenhovius, "Classifying finite-dimensional C*-algebras by posets of their commutative C*-Subalgebras," *Int. J. Theor Phys*, vol. 54, no. 12, pp. 4615–4635, 2015. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/s10773-015-2817-6 33, 47

[12] C. Heunen and A. J. Lindenhovius, "Domains of commutative C*-Subalgebras," *arXiv:1504.02730v4*, p. 25, 2016. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1504.02730v4 33, 47

[13] C. Heunen, “Characterizations of categories of commutative C*-Subalgebras,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 331, no. 1, pp. 215–238, 2014. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/s00220-014-2088-8 33, 47

[14] J. Hamhalter, “Isomorphisms of ordered structures of abelian Câˆ—-subalgebras of Câˆ—-algebras,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 383, no. 2, 2011. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.05.035 33, 47

[15] E. Hartmann, *Planar Circle Geometries: an introduction to Moebius-, Laguerre- and Minkowski-planes.* Springer-Verlag, 2004. 34, 47

[16] S. Mazuelas, *Interpretación proyectiva de las geometrías métricas, equiformes e inversivas.* Tesis doctoral . Director: J.M. Aroca, 2008. [Online]. Available: https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=676503 34

[17] ——, “Interpretación proyectiva de las métricas del plano real,” *Rev. Semin. Iberoam. Mat.*, vol. 3, no. VI fasc. 3, pp. 109–125, 2008. [Online]. Available: http://ctri.uva.es/ctri/images/stories/documentos/rsim3v-vi.pdf 34

[18] H. Havlicek and K. List, “A three-Dimensional Laguerre geometry and its visualization,” *In proceedinhs-Dresden Symposium geometry: constructive and kinematic*, vol. Institut f, pp. 122–129, 2013. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1304.0223 34, 47