



RAC - Revista de Administração
Contemporânea

ISSN: 1415-6555
rac@anpad.org.br

Associação Nacional de Pós-Graduação e
Pesquisa em Administração
Brasil

Marques de Oliveira, Alessandro Vinícius; Baptista Ferraz, Renée
Overbooking, Gerenciamento de Receitas e Previsão de Demanda: Estudo Empírico das Posições em
Sistemas de Reservas de Companhias Aéreas
RAC - Revista de Administração Contemporânea, vol. 12, núm. 2, abril-junho, 2008, pp. 481-506
Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração
Rio de Janeiro, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84012209>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe , Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Overbooking, Gerenciamento de Receitas e Previsão de Demanda: Estudo Empírico das Posições em Sistemas de Reservas de Companhias Aéreas

Overbooking, Yield Management and Demand Forecast: an Empirical Study of the Arrivals in Airline Reservation Systems

Alessandro Vinícius Marques de Oliveira*

Ph.D. em Economia pela Warwick University, Reino Unido.

Professor e Pesquisador, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA, São José dos Campos/SP, Brasil.

Renée Baptista Ferraz

Mestre em Transporte Aéreo e Aeroportos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA, São José dos Campos/SP, Brasil.

*Endereço: Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica – IEI, Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, Centro Técnico Aeroespacial – CTA, Praça Marechal Eduardo Gomes, 50, Vila das Acácias, São José dos Campos/SP, 12228-900. E-mail: A.V.M.Oliveira@gmail.com

RESUMO

A prática de *overbooking* em transporte aéreo é o resultado de uma estratégia mais ampla, conhecida como Gerenciamento de Receitas (*Revenue Management*), que visa otimizar o faturamento da firma. Neste contexto de complexidade da tomada de decisão, investir na habilidade de fazer previsões acuradas de demanda e, sobretudo, do processo de chegada de pedidos nos Sistemas de Reservas, confere vantagens competitivas relevantes à empresa e melhor desempenho no mercado. O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma modelagem do processo de chegadas nos Sistemas de Reservas de companhias aéreas, sendo extensível para firmas prestadoras de serviços em geral. Tendo como base um conjunto de informações reais, coletadas junto a uma operadora da Ponte Aérea Rio de Janeiro-São Paulo, o estudo promove a estimativa paramétrica de um modelo de chegada de posições de reservas. O modelo econômico de séries temporais utilizado enquadra-se no referencial teórico dos modelos de previsão de demanda. Os principais resultados são indicativos de um processo auto-regressivo de chegadas, no qual variáveis de nível defasadas, de variação e aceleração têm poder preditivo dos níveis correntes de chegada. O estudo supre, assim, uma carência da literatura, relativa aos métodos de previsão associados a Sistemas de Reservas corporativos.

Palavras-chave: *overbooking*; gerenciamento de receitas; transporte aéreo; séries temporais.

ABSTRACT

The practice of overbooking in air transportation is a result of a broader market strategy, known as Yield Management (Revenue Management), which aims at optimizing the total revenues of airlines. Given this complex environment for decision making, one has that the investment in improving demand forecast capabilities, and more specifically, in understanding the process of arrival of requests in Reservation Systems, is potentially competitive advantage enhancing and ultimately improves market performance. The present paper aims at developing an empirical model of the arrivals of requests in airlines' (and, more generally, service firms') Reservation Systems. By making use of a database consisting of actual information collected from an airline operating the Rio de Janeiro – São Paulo shuttle route, here we make use of parametric estimation of a model of reservation arrivals. The time series modeling implemented here can be regarded as within a theoretical framework for demand forecast. Main results are indicative of an autoregressive process of arrivals in which lagged variables along with differences have high predictive power of current arrival levels. This paper is therefore able to fill a gap found in the literature regarding forecast methods applied to corporate Reservation Systems.

Key words: *overbooking*; yield management; air transportation; time series.

INTRODUÇÃO

A prática de *overbooking* em transporte aéreo, isto é, o aumento virtual da capacidade de uma aeronave no Sistema de Reservas, é o resultado de uma estratégia de mercado mais ampla, conhecida como Gerenciamento de Receitas (*Yield Management* ou *Revenue Management*), cujo objetivo central é otimizar a receita total das companhias aéreas, levando em consideração aspectos de *pricing*, controle de estoque de assentos, diferenciação de produto e condições da concorrência. Esta estratégia tem sido amplamente utilizada no setor como uma das soluções mais eficazes para lidar com problemas de ajuste da capacidade dos vôos oferecidos à demanda e suas flutuações. No entanto, para que o *overbooking* seja implementado de forma eficiente, é necessário um adequado entendimento acerca do comportamento do passageiro quanto ao período em que este efetua a reserva ou compra da passagem, sobretudo com relação à antecedência da chegada do seu pedido no Sistema de Reserva da empresa.

Assim, neste contexto de complexidade da tomada de decisão, investir na habilidade de fazer previsões acuradas com relação à demanda e, em particular, quanto ao processo de chegada de pedidos nos Sistemas de Reservas, confere vantagens competitivas relevantes à empresa e, em última instância, melhor desempenho no mercado.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma modelagem do processo de chegadas nos Sistemas de Reservas de companhias aéreas, sendo extensível para firmas prestadoras de serviços em geral. Tendo como base um conjunto de informações reais, coletadas na operadora da Ponte Aérea Rio de Janeiro, São Paulo, o estudo supre, assim, uma carência da literatura nacional, relativa tanto aos Sistemas de Gerenciamento de Receitas e estudos de *overbooking*, quanto com relação a métodos de previsão associados a Sistemas de Reservas de empresas.

Uma questão fundamental em operações de empresas aéreas, em que o produto é altamente **perecível**, ou seja, deve ser comercializado em período estritamente definido no tempo, é a forma como o processo de reservas deve suceder. Grande parte dos vôos em que todos os assentos foram reservados/vendidos, freqüentemente partem com número significativo de assentos vazios; este fenômeno acontece por conta de dois tipos de comportamento dos passageiros: 1. o comportamento conhecido como ***no-show***, definidos como a situação em que o passageiro que compra a passagem, mas não comparece ao embarque por

conta de algum fator de desistência pessoal; e 2. o comportamento de cancelamentos de reservas⁽¹⁾ feitos com pouca antecedência em relação ao horário do vôo, situação em que o passageiro que comprou a passagem comunica à companhias que não irá comparecer a um vôo cuja partida está programada para um futuro bem próximo.

As práticas de *no-show* e cancelamento com baixa antecedência acabam por inviabilizar a re-ocupação dos assentos vazios pela companhia aérea, em tempo hábil para o vôo determinado. Muitas empresas procuram proteger-se das perdas resultantes dessas atitudes, praticando o *overbooking* ou venda de passagens além do número de assentos disponíveis na aeronave. As companhias aéreas reconhecem a necessidade da prática e, em geral, declaram que, pelo *overbooking* controlado, podem reduzir o número de assentos vazios e, ao mesmo tempo, atender aos interesses dos passageiros, disponibilizando maior número de reservas nos vôos mais demandados.

Realizar o controle do *overbooking* significa estabelecer o número máximo de assentos – além da capacidade do vôo – a ser comercializado, de forma que a empresa não arque com prejuízos, quer sejam referentes aos custos de compensação dos passageiros impedidos de embarcar, ou aos custos associados à receita **desperdiçada** em função dos assentos vazios nas aeronaves. Assim, por **controlado** entende-se o estabelecimento de níveis de *overbooking* que sejam estatisticamente definidos e que sejam acompanhados pelo efetivo bloqueio de reservas adicionais, caso o nível de demanda esperada o ultrapasse.

Para que esse controle seja feito de forma eficaz, é necessário conhecer como ocorre a chegada das reservas nos Sistemas de Reservas das companhias aéreas, isto é, como se comportam os passageiros em relação ao período⁽²⁾ em que efetuam a reserva/compra⁽³⁾ de assentos para determinado vôo. Desta forma, é necessário que as empresas aéreas disponham de ferramentas que permitam prever os padrões de chegada dos passageiros nos Sistemas de Reservas, pois o conhecimento desse comportamento é fundamental para a definição de critérios de tomada de decisão no que tange ao controle de estoque de assentos.

O presente trabalho está assim dividido: na segunda seção, será feita uma contextualização da problemática de previsão nos Sistemas de Reservas das companhias aéreas; e, na terceira seção, será desenvolvido um modelo empírico de chegada de reservas, utilizando análise de séries temporais; no final, as conclusões são apresentadas.

O CONTEXTO DA PREVISÃO DAS POSIÇÕES EM SISTEMAS DE RESERVA

O setor aéreo é um dos mercados cuja volatilidade das posições financeiras e de lucratividade das empresas é alta, sobretudo por conta de suas características de necessidade de vultosos investimentos de capital, flutuação e sazonalidade da demanda, perecibilidade do produto, alta elasticidade-renda, vulnerabilidade a choques externos (sobretudo taxa de câmbio e preço do petróleo) e grau de contestabilidade do mercado acima da média. Uma ferramenta competitiva para se reduzir tal volatilidade, e que tem sido fortemente utilizada com a pós-desregulamentação desta indústria, em todo o mundo, é o chamado Gerenciamento de Receitas, *Yield Management* ou *Revenue Management*. Trata-se de estratégia composta por este quarteto: Discriminação de Preços, Diferenciação de Produtos, Sistema de Controle de Estoque de Assentos e *Overbooking*. São conhecidos os exemplos internacionais que ilustram as vantagens dessas estratégias, sobretudo em casos onde há a necessidade de manter preços competitivos, sem ter que perder receitas; uma discussão mais ampla sobre o Gerenciamento de Receitas pode ser encontrada em Mayo (1999) e Oliveira (2000).

O chamado Controle de Estoque de Assentos [CEA] é a ferramenta do Gerenciamento de Receitas responsável pela determinação dos limites de assentos a serem alocados em cada classe tarifária, pela definição dos níveis de *overbooking* praticados e, consequentemente, pela otimização das receitas geradas pela venda de passagens aéreas. No que tange à estratégia de *overbooking*, o controle da demanda atua definindo a melhor alternativa a ser adotada em relação à aceitação ou não de novas reservas nos vôos mais demandados, considerando a hipótese de maximização das receitas. **A decisão de aceitar ou recusar uma reserva é baseada no número de assentos previamente reservados** (Subramanian, Stidham, & Lautenbacher, 1999). Em função da habitual situação de cancelamento e *no-show*, e com o intuito de minimizar as perdas de receitas decorrentes da capacidade ociosa resultante, as empresas aéreas fazem uso de modelos matemáticos, a fim de estabelecer políticas de reservas que permitam otimizar a receita total de passageiros em cada vôo oferecido.

Assim, para que os modelos de *overbooking* sejam desenvolvidos é necessário, inicialmente, entender o comportamento dos passageiros quanto ao período em que este efetua a reserva ou compra a passagem, isto é, com que antecedência da partida a demanda do passageiro se efetiva no sistema. Em outras palavras, **deve-se conhecer como se desenrola o processo de chegada das reservas nos sistemas das empresas aéreas**.

Se a estrutura da demanda for estável durante o período de reservas, a maximização da receita é obtida simplesmente através da determinação de preços em níveis apropriados (McGill & Van Ryzin, 1999). Entretanto esta não é a característica da demanda por transporte aéreo. Sabe-se que a estrutura da demanda deste setor não é estável e também não é uniforme ao longo do processo de reservas. A demanda possui características peculiares, representadas pelas diferentes percepções dos usuários em relação aos atributos da viagem – preço, frequência, flexibilidade do bilhete, entre outros – refletindo-se no comportamento deles quanto à chegada no Sistema de Reservas, ou seja, no tempo de antecedência da data da reserva em relação à data do vôo. Assim, o desenvolvimento, por parte das companhias aéreas, de uma habilidade de adequadamente prever o processo de chegada nos seus Sistemas de Reservas, é tarefa fundamental para que possam melhor definir os moldes da estratégia de *overbooking* e, em última instância, do próprio Gerenciamento de Receitas adotado. No caso específico do Controle de Estoque de Assentos de empresas aéreas, prever a demanda está intimamente ligado à disponibilização da oferta, ou seja, do número de assentos alocados em cada classe tarifária, para cada vôo, tarefa esta extremamente complexa, dada a multiplicidade de variáveis-objetivo e do dinamismo dos mercados aéreos.

A previsão da demanda é viabilizada devido à existência de bancos de dados alimentados por informações acerca do processo de chegada das reservas de cada vôo. O Sistema de Reservas informa ao Sistema de Gerenciamento de Receitas o número de **posições de reserva** efetuadas até um momento específico. Desta forma, é possível que sejam realizadas inferências estatísticas, proporcionando uma base dinâmica para a tomada de decisão. A atualização dos valores é feita periodicamente – diária, mensal etc. –, dependendo do tipo de análise que a empresa pretende fazer. Segundo Mayo (1999), as empresas aéreas definem estes instantes do tempo como *Data Collection Points* [DCPs], por serem os momentos em que os Sistemas de Gerenciamento de Receitas coletam a informação estocada nos Sistemas de Reservas, de forma que a otimização das receitas por meio do adequado controle de estoque de assentos ofertado seja realizada, dados os produtos tarifários da empresa.

MODELAGEM EMPÍRICA DA CHEGADA DE POSIÇÕES EM SISTEMAS DE RESERVA

Nesta seção, será efetuado o estudo de caso proposto, com a estimativa econometrífica de um modelo de chegada de posições no Sistema de Reservas,

utilizando-se uma base de dados real, coletada de uma companhia aérea que operava no mercado da Ponte Aérea Rio de Janeiro – São Paulo.

Os Dados

A estimação do modelo de chegadas de pedidos de reservas/compras será realizada, a partir de dados da ligação Rio de Janeiro – São Paulo (par de aeroportos direcional Santos Dumont – Congonhas), obtidos por meio de coleta de informações do Sistema de Reservas da Transbrasil Linhas Aéreas, referentes ao mês de setembro de 1999. A utilização de dados referentes ao ano de 1999 deve-se à dificuldade em obter valores mais recentes, visto que as empresas não têm interesse em divulgá-los por motivos estratégicos, evitando comprometer seu desempenho perante a concorrência. Esta mesma base de dados já foi utilizada em estudos anteriores (Oliveira, 2003; Oliveira, Moreno, & Müller, 1999), mostrando-se adequada para o propósito em estudo, de aplicação de uma metodologia de previsão de posições de reserva que se utiliza de uma base de dados real.

Um fator extremamente relevante para esta análise diz respeito ao fato de que a base de dados utilizada está isenta de interferência quanto ao preço, pois na época em que os dados foram coletados a companhia aérea oferecia apenas uma classe tarifária. Isto implica que não havia influência por parte da empresa em relação ao preço, ou seja, a companhia não podia induzir o padrão de reservas (comportamento de chegada) pela liberação ou bloqueio de assentos nas diferentes classes tarifárias. Desta forma, tem-se que o padrão de chegadas de reservas, observado na amostra, não sofreu influência de alterações na estrutura tarifária disponível aos passageiros, apesar de não estar livre de interferência das modificações dos Sistemas de Gerenciamento de Receitas das demais companhias aéreas (rivais).

Como salientado anteriormente, o modelo desenvolvido se baseia em estrutura de painel de dados. Essa forma de associação permite classificar as respostas dos diferentes indivíduos a determinados acontecimentos, em diferentes momentos. Toda análise de painel de dados combina, assim, uma análise de série temporal em conjunto com uma análise de dados transversais (*cross-section*). Segundo Smith (2000), a teoria econômétrica para regressão com dados em painel foi desenvolvida para análise de amostras em que o número N de indivíduos observados é bastante alto; porém o número T de períodos de tempo é pequeno, exatamente o caso da presente amostra.

Uma das vantagens da estimativa de dados em painel é a relevância da heterogeneidade individual. Desta forma, pode-se dizer que os dados em painel sugerem a existência de características diferenciadoras de cada indivíduo, neste

caso os vôos. Essas características podem ou não ser constantes ao longo do tempo, de tal forma que estudos de séries temporais ou transversais (*cross-section*) que não considerem essa heterogeneidade podem gerar resultados fortemente enviesados (Marques, 2000). Desse modo, a estrutura de dados em painel fornece maior quantidade de informação, maior variabilidade dos dados, menor colinearidade entre as variáveis, maior número de graus de liberdade e maior eficiência na estimativa. Portanto os dados em painel permitem identificar e medir efeitos que não seriam detectados em análises exclusivamente temporais ou seccionais.

Tratamento dos Dados

A base de dados, com estrutura de painel, utilizada para a estimação do modelo, é constituída de informações relativas ao processo de chegada de passageiros no Sistema de Reservas da companhia Transbrasil, na Ponte Aérea Rio de Janeiro – São Paulo, nos dias 24, 27, 28, 29 e 30 de Setembro de 1999; refere-se aos 40 vôos diários que a empresa oferecia – códigos TBA300 a TBA339 – em ambos os sentidos da ligação. A amostra fornece os valores diários acumulados do número de reservas (aqui denominados de **posição de reservas**) já processadas no sistema para cada dia de antecedência do embarque, de cada vôo. Embora os Sistemas de Reservas das companhias aéreas costumem considerar os 60 dias anteriores ao vôo (Oliveira *et al.*, 1999), nesta análise o período total de antecedência de reserva foi considerado como sendo de 15 dias, por ser um período representativo do padrão de reservas característico deste mercado (Ponte Aérea), onde o maior fluxo de chegadas está concentrado nos dias próximos ao vôo.

Desta forma, considerando a estrutura de dados em painel, admite-se que cada conjunto de observações realizadas durante os 15 dias que antecedem determinado vôo representa um painel. Logo, a amostra contém 200 painéis, cada um representando um vôo específico e suas características quanto ao comportamento da chegada dos passageiros no Sistema de Reservas. Portanto a amostra de dados contém um total de 3.000 observações (15 dias de posições para 200 vôos).

A base de dados original, bruta, possuía dados de reservas coletados entre os dias 2 de setembro e 30 de setembro de 1999. Analisando os dados, percebe-se que, nesta base, a companhia **abre** o Sistema de Reservas da Ponte Aérea com 28 dias de antecedência da data do vôo, ou seja, o passageiro pode efetuar reserva em um vôo até 28 dias antes da data de embarque. Sendo assim, nesta base original, para os vôos com partida no dia 2 de setembro estão disponíveis

apenas informações de reservas relativas a este mesmo dia. Para vôos com data de partida no dia 3, tem-se os valores de reservas relativos a este dia e ao anterior a ele; assim por diante. Vale notar que, uma vez que o processo de reservas é aberto com 28 dias de antecedência, a partir do dia 3 de setembro tem-se a coleta de dados relativos aos vôos do mês de outubro. Como consequência disto, alguns vôos apresentam dados incompletos, constando informações de parte do período de reservas. Assim, com o intuito de equilibrar a amostra, optou-se por trabalhar a base, escolhendo-se apenas alguns dias de operação.

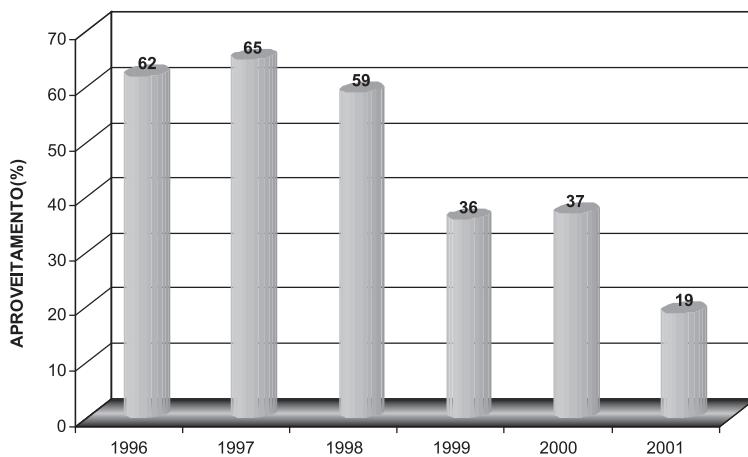
Uma última consideração diz respeito aos fins-de-semana e feriados. Foram apontadas observações faltantes na amostra, devido ao procedimento da Transbrasil de não extrair posições do Sistema de Reservas nos finais de semana e feriados; assim, estavam disponíveis apenas as posições extraídas em dias úteis, o que demandou um ajuste na amostra, de forma que os 14 dias de antecedência da data de partida dos vôos passassem a se referir apenas aos dias úteis. Procedimentos como a interpolação das posições de reserva entre as sextas-feiras e as segundas-feiras foram descartados por serem arbitrários, ainda mais tendo em vista que o objetivo da análise era justamente o de capturar os padrões de chegada dos pedidos de reservas.

A Companhia Aérea

A fim de esclarecer a situação da empresa fornecedora da base de dados no mercado de transporte aéreo brasileiro, bem como justificar os valores contidos na amostra em análise, esta seção apresenta um breve relato sobre a Transbrasil Linhas Aéreas. A Transbrasil teve suas origens na companhia aérea Sadia, cujo nome foi inspirado no frigorífico SA Indústria e Comércio Concórdia – que transportava carne fresca entre o interior de Santa Catarina e São Paulo. Em 1953, com uma aeronave alugada, o frigorífico iniciou suas operações de transporte aéreo. Em 1955 a empresa comprou a aeronave, fundando a companhia aérea Sadia S.A. Transportes Aéreos. Apenas em 1972, após ter-se transformado em empresa de capital aberto, a companhia aérea foi renomeada e passou a ser chamada de Transbrasil.

A companhia aérea finalizou suas operações em 2001; naquele ano, a ligação Rio – São Paulo refletiu a redução da atividade econômica do país, apresentando uma retração de demanda de aproximadamente 14%.

Figura 1: Evolução do Aproveitamento Médio Anual da Transbrasil na Ponte Aérea



Fonte: Departamento de Aviação Civil [DAC] (1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001).

A Figura 1 mostra a evolução do aproveitamento médio anual da Transbrasil na Ponte Aérea. Em 1999 a empresa apresentou a pior média de ocupação desde 1996, perdendo apenas para 2001, ano em que a empresa encerrou suas operações. A média de 36% passageiros ao ano representava aproximadamente 47 passageiros embarcados em cada vôo, dada a capacidade de 132 assentos das aeronaves Boeing 737-300 que operavam nesta ligação. O ano de 1999 marcou o início da crise vivida pela empresa, crise que se prolongou até o encerramento de suas operações no final de 2001, com a baixíssima média de 25 passageiros transportados em cada vôo. Os dados da Figura 1 são consistentes com os baixos níveis de demanda verificados na base de dados de posições de reserva que compõem a amostra do presente estudo; tem-se, assim, que a empresa passava por dificuldades financeiras graves, em um estado de insolvência que, em última instância, levou à completa retirada de suas operações em 2001.

O Sistema de Reservas utilizado pela Transbrasil foi inaugurado em 1977, denominado **Sistema de Transbrasil de Automação de Reservas** [STAR], computadorizado e desenvolvido com tecnologia nacional. Dois anos mais tarde, a empresa adquiriu o novo IBM360-65, entrando em operação no **Centro de Processamento de Dados** da empresa, aperfeiçoando o Sistema de Reservas da companhia. Pelo fato de se tratar de um serviço *shuttle*, onde uma parcela considerável dos passageiros tem o comportamento de *go-show* (por isso esses mercados são também chamados de *walk-on*), a Ponte Aérea sempre foi uma ligação em que a adoção de reservas não era prática observada na maioria das empresas; a Varig, por exemplo, passou a aceitá-las, neste mercado, somente em 2005, porém apenas parcialmente; parte dos assentos

é ainda destinada aos passageiros *go-show*, que adquirem a passagem no aeroporto, no momento do embarque⁽⁴⁾.

Características da Demanda

Em alguns setores da indústria de serviços, o comportamento do consumidor e a disposição de pagar por determinado serviço são incertos e de difícil mensuração. Como já foi dito, para a indústria de transporte aéreo, em que as empresas disputam o mercado de passageiros, conhecer estes fatores é vital, para que se mantenham íntegras neste mercado extremamente competitivo.

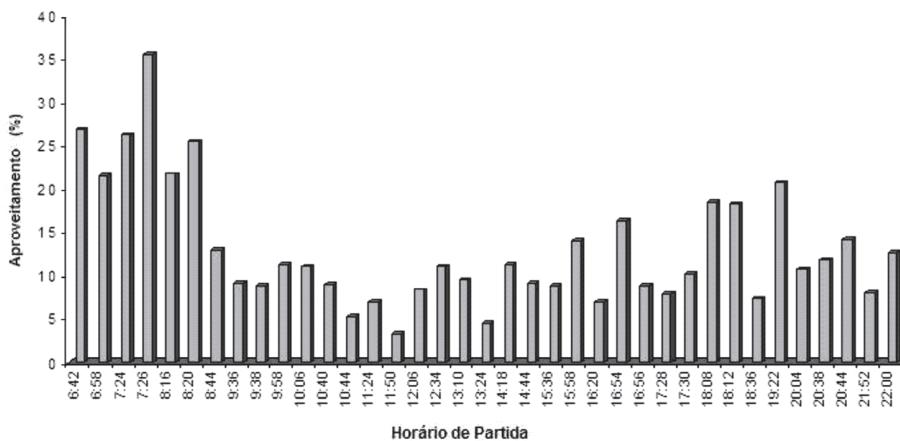
Uma das formas de segmentação utilizada no transporte aéreo é relacionada ao motivo de viagem a ser realizada pelo passageiro, ou seja, os propósitos que o levam a se deslocar entre uma ou mais localidades. Esta segmentação é necessária para que as empresas estabeleçam os produtos (classes de reservas) e as tarifas que serão aplicadas em cada uma (classes tarifárias). De maneira simplificadora, esta classificação pode ser dividida em passageiros em viagens de negócios ou de lazer. Outras categorias que podem ser consideradas são a de viagens com propósitos de urgência – emergência, doença, funeral etc. – e uma categoria representando outros motivos de viagens, em que são considerados os passageiros viajando para estudar ou por um novo emprego, por exemplo. Pelas características do comportamento em relação às viagens aéreas, os passageiros da ponte-aérea estão tipicamente enquadrados na categoria “viagens a negócios”. Embora nem sempre estejam viajando com este propósito, a característica em relação ao processo de chegada no Sistema de Reservas da companhia é basicamente a mesma, como também suas necessidades e disposição de pagar pela viagem.

De forma geral, os passageiros da ponte-aérea têm como objetivo minimizar sua desutilidade associada à viagem; desta forma, tendem a substituir vantagens monetárias por vantagens de tempo, ou seja, estão dispostos a pagar tarifas mais elevadas em troca de serviços mais eficientes, principalmente quanto à regularidade – frequência de vôos oferecidos e pontualidade – uma vez que quanto menor for o tempo gasto na viagem como um todo, menor o custo total atribuído a ela. Isto significa que estes usuários são pouco elásticos ao preço da passagem aérea, porém são altamente elásticos quanto à qualidade dos serviços oferecidos. Além disso, pelo fato de as viagens serem geralmente planejadas com pouca antecedência da data de embarque, devido à incapacidade de previsão de longo prazo, a disponibilidade de assentos para reservas próximas a esta data é de extrema importância para estes passageiros.

De maneira geral, a característica da demanda na ligação Rio – São Paulo é uma maior ocupação nos vôos do período da manhã e início da noite (com uma

ligeira queda), com menor aproveitamento da capacidade nos vôos entre este intervalo. Esta tendência pode ser visualizada através da figura apresentada a seguir. A Figura 2 ilustra a característica dos picos de demanda nos vôos da Ponte Aérea da Transbrasil, no mês de setembro de 1999.

Figura 2: Característica dos Picos de Demanda nos Vôos da Transbrasil na Ponte-Aérea



Fonte: Dados da amostra.

A Tabela 1 a seguir apresenta valores de estatísticas descritivas da demanda para os dias de partida dos vôos ($t = 0$), para cada dia da semana. Pode-se perceber como a companhia aérea passava por extremas dificuldades no mercado, tendo em vista que a sua demanda média, e mesmo a máxima, estavam bem abaixo da capacidade (132 assentos, Boeing 737-300); houve vôos onde a última posição de reserva foi tão baixa quanto 1 ou 2 – lembrando apenas que não são exibidos, nos valores da Base de Dados, o número de passageiros efetivamente embarcados, mas apenas as posições no Sistema de Reserva.

Tabela 1: Estatísticas Descritivas da Demanda por Dia da Semana

Dia da Semana	Média	Desvio Padrão	Máx	Min
Segunda	14,175	16,411	65	1
Terça	15,125	11,321	41	1
Quarta	14,875	10,532	51	2
Quinta	17,575	9,004	43	2
Sexta	24,775	16,095	90	4
Total	17,305	13,477	90	1

Fonte: Dados da amostra.

Especificação do Modelo

Modelou-se o comportamento da chegada de pedidos⁽⁵⁾ no Sistema de Reservas como um processo auto-regressivo do tipo **AR(2) transformado**; a modificação introduzida foi a de se extrair a primeira diferença a fim controlar a não-estacionariedade do modelo AR(2) comum. Assim, tem-se a equação em (1):

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \Delta^2 Y_t + \beta_3 \Delta^3 Y_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

Pode-se demonstrar que está implícito em (1) um processo AR(2) para Y_t , transformado pela 1ª diferença, demonstração esta apresentada no Apêndice deste trabalho. O modelo empírico aqui adotado, equivalente a (1), é o seguinte:

$$posição_{i,t} = \beta_1 posição_{i,t-1} + \beta_2 \Delta^2 posição_{i,t} + \beta_3 \Delta^3 posição_{i,t} + \gamma_i + \eta_t + \varepsilon_{i,t} \quad (2)$$

Onde **posição_{i,t}** corresponde à variável resposta que representa o número de solicitações presentes no Sistema de Reserva da empresa (no DCP específico) para t dias de antecedência da data de embarque do vôo i ($i = 1, \dots, 200$ e $t = 0, 1, \dots, 15$). O dia de partida do vôo é representado por $t = 0$. A variável **posição_{i,t-1}** corresponde à posição (estoque) de reservas existentes no Sistema de Reservas no dia anterior ao dia t , isto é, o número de reservas em $t - 1$ dias de antecedência da data de embarque. Δ^2 **posição_{i,t}** representa a intensidade da variação do fluxo de posições de reservas entre t e $t - 1$; pode-se dizer que esta é uma medida da aceleração da variação do número de reservas no Sistema de Reservas entre estes dois pontos. Já Δ^3 **posição_{i,t}** mede a variação em Δ^2 **posição_{i,t}**.

As variáveis γ_i e η_t são variáveis *dummies* que permitem considerar os efeitos de fatores qualitativos do mercado. Portanto, γ_i corresponde à variável *dummy* que representa as características não-observáveis ao analista (mas observáveis pelos passageiros e companhias aéreas) específicas de cada vôo (por exemplo, a conveniência do horário de partida do vôo, idiossincrasias do dia da semana em que ele ocorre, *mix* de tipos de passageiros que utilizaram a Ponte Aérea naquele vôo etc.); η_t corresponde à variável *dummy* que representa as características não-observáveis do dia da coleta dos dados no sistema (ex. choques de demanda ou de oferta de viagens naquele dia específico, graus de preferência dos passageiros por aquele dia etc.); $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 são os parâmetros a serem estimados.

Finalmente, $\varepsilon_{i,t}$ corresponde ao erro aleatório que, em geral, se assume $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \varepsilon)$, assumindo-se, portanto, variância constante. No presente caso, entretanto, espera-se, ex-ante, que a variância dos resíduos não seja constante: primeiro, porque o processo de chegadas de reservas é não estacionário – a expectativa é a de que o erro seja maior na medida em que o tempo passa, ou seja, na medida em que chega a data de embarque; e segundo, porque há um

painel com 200 vôos, cada um com o seu próprio grau de variabilidade. Foi realizado um teste da hipótese quanto à variância constante, rejeitando-se a hipótese nula de homoscedasticidade a 1% de significância. O teste de hipóteses foi o Breusch-Pagan/Cook-Weisberg (Multiplicadores de Lagrange), obtendo-se a estatística qui-quadrado de 2872,5 (p-valor = 0,001). O modelo empírico proposto foi estimado por meio de um método de regressão de séries temporais, a partir da estrutura de dados em painel. Com este intuito, foi utilizado o estimador *Huber-White-Sandwich* que, ao contrário do método dos Mínimos Quadrados Ordinários, apresenta desvio-padrão das estimativas consistentes com o problema da heterocedasticidade.

Resultados

A Tabela 2 apresenta os resultados da estimação do modelo de chegadas de reservas em (2), exibindo apenas os coeficientes relativos às variáveis $\text{posição}_{i,t-1}$, $\Delta^2\text{posição}_{i,t}$, e $\Delta^3\text{posição}_{i,t}$.

Tabela 2: Resultados do Modelo Ajustado

Variáveis	$\text{posição}_{i,t}$	
$\text{posição}_{i,t-1}$	1,279	‡
	(0,015)	
$\Delta^2\text{posição}_{i,t}$	1,349	‡
	(0,056)	
$\Delta^3\text{posição}_{i,t}$	-0,442	‡
	(-0,041)	
N. de Observações	2.400	
R^2 Ajustado	0,9919	
F(214, 2186)	1817,04	‡

Notas: Desvios padrão em parênteses.

Efeitos fixos de vôo (γ_i) e dia da posição (η_t) omitidos

* Nível de significância de 10%

† Nível de significância de 5%

‡ Nível de significância de 1%

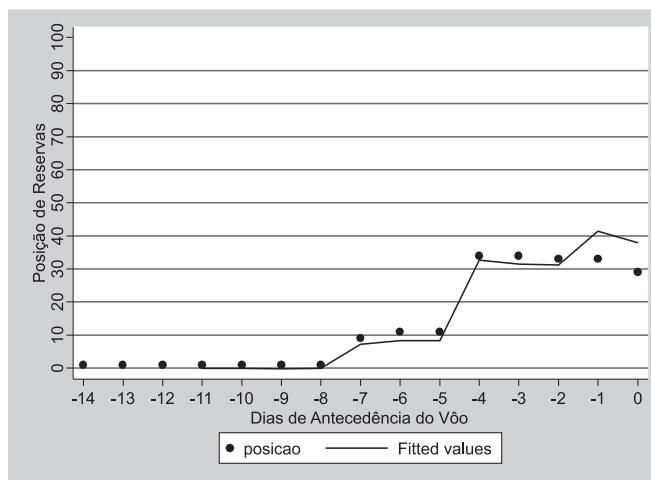
A análise do modelo mostrou que os parâmetros são todos significativos em nível de 1% de significância, ou seja, rejeita-se a hipótese de que o coeficiente estimado destas variáveis é igual a zero. Reporta-se também o valor do teste F, que analisa a significância global do modelo. Neste teste, a hipótese nula é de que todos os coeficientes são conjuntamente iguais a zero, enquanto a hipótese

alternativa é de que pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero. Os resultados mostraram que este teste é significante em nível de 1% de significância, rejeitando, assim, a hipótese nula. Outra medida de qualidade do ajuste foi o **coeficiente de determinação (R^2)**, onde foi possível ter 99,2% das variações da variável dependente, em relação à sua média, sendo explicada pelo modelo de regressão adotado. Todos os resultados são indicativos de que é possível prever o número de posições de reservas no dia t , utilizando-se indicadores de chegada em dias anteriores e de variação e aceleração das chegadas.

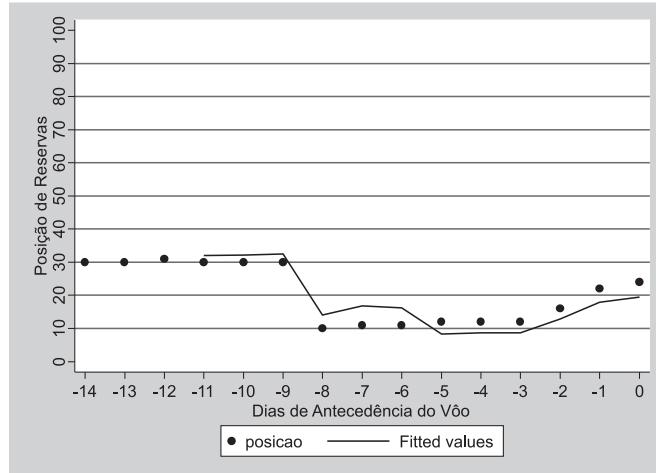
Por ter elevada importância em se tratando de *overbooking*, o foco deste trabalho está direcionado à análise da eficiência do modelo nas previsões dos instante $t = 0$, isto é, o dia de partida dos vôos. De qualquer forma, uma discussão mais abrangente será realizada adiante, por abordar aspectos de interesse no que diz respeito ao Gerenciamento de Receitas como um todo. A média do resíduo da amostra para o instante $t = 0$ foi de -0,277, com desvio padrão igual a +1,444. O sinal negativo indica que o ajuste do número de reservas para o dia de partida foi, em geral, subestimado pelo modelo. No entanto o valor encontrado não é significante do ponto de vista estatístico, neste contexto. Isto significa que a previsão do número de reservas, relevante neste estudo para vôos com elevada demanda (quando o *overbooking* é praticado), é considerada suficientemente precisa.

Abaixo segue uma seqüência de análises do desempenho de ajuste do modelo proposto, abordando casos de vôos específicos encontrados na Base de Dados. As Figuras de 3 a 6 ilustram o ajuste do modelo realizado para os vôos que apresentaram os resíduos limítrofes mencionados na Tabela 2.

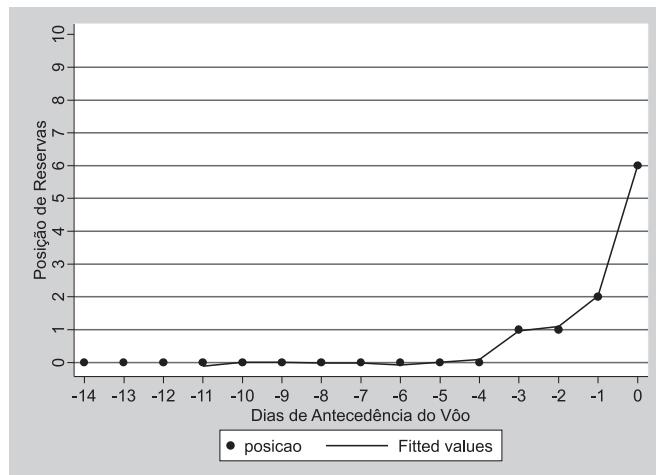
Figura 3: Valores Observados x Previstos do Vôo de Quinta-feira, TBA323-30/09, 15:36h



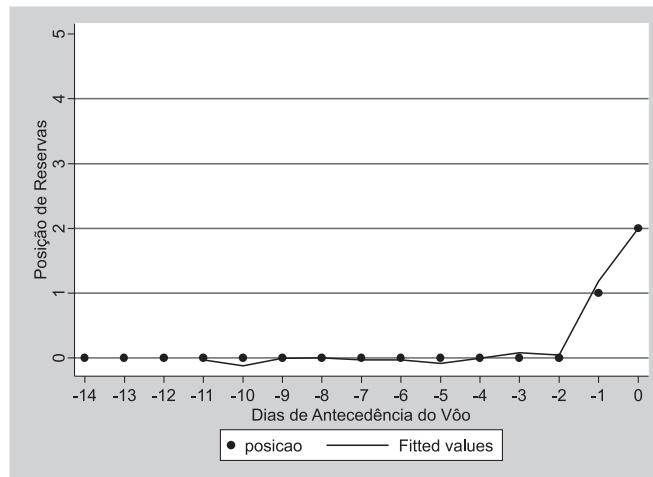
**Figura 4: Valores Observados x Previstos do Vôo de Quinta-feira,
TBA309-30/09, 10:40h**



**Figura 5: Valores Observados x Previstos do Vôo de Terça-feira,
TBA311-28/09, 11:24h**



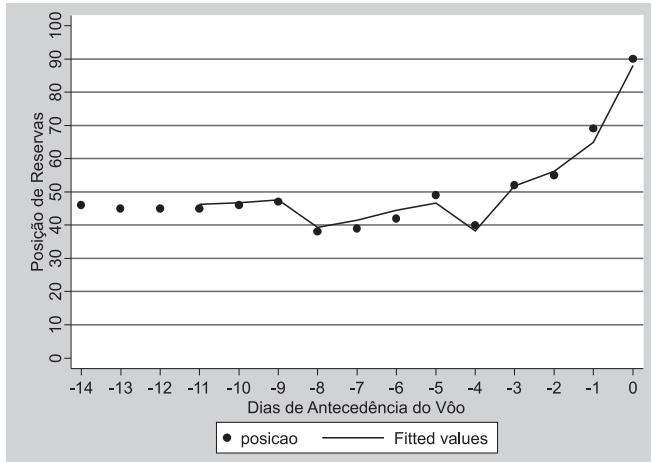
**Figura 6: Valores Observados x Previstos do Vôo de Quarta-feira,
TBA315-29/09, 16:56h**



Cabe esclarecer o motivo pelo qual os três primeiros pontos do gráfico ($t = -14$, -13 e -12) não apresentam valores previstos. Isto decorre da formulação do modelo, uma vez que, para prever o número de reservas efetuadas em determinado dia, são necessárias informações relativas aos dias anteriores a este. Assim, a posição $t = -14$ não é prevista, pois não temos informações a respeito da posição em $t = -15$, e assim por diante.

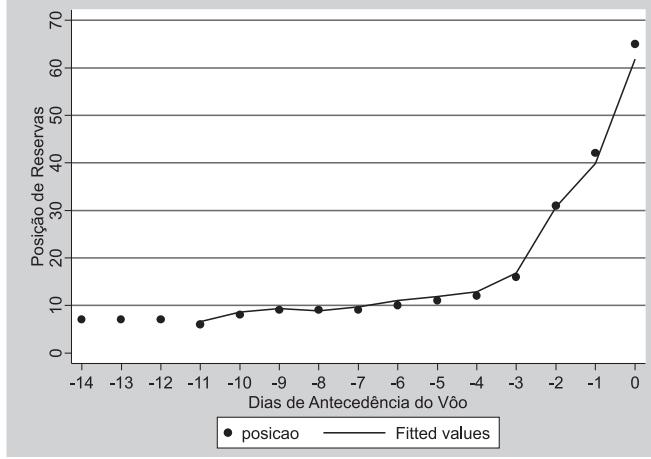
A Figura 7 ilustra o ajuste do modelo, realizado com relação a um voo no horário de pico de uma sexta-feira. A análise dos resultados das estimativas demonstra a qualidade da aderência nos vôos das sexta-feiras tipicamente encontrados na Base de Dados que, conforme as estatísticas descritivas apresentadas anteriormente, são os dias de maior média de demanda nos vôos.

**Figura 7: Valores Observados x Previstos dos Vôos de Sexta-feira,
TBA331-24/09, 19:22h**



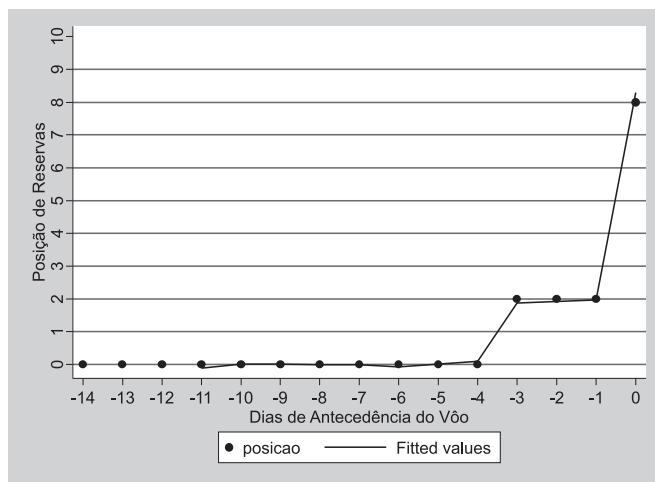
A Figura 8, a seguir, exibe o ajuste do modelo para o voo com maior número de reservas de uma segunda-feira amostral; como era de esperar, este é um voo com decolagem no período da manhã. Os resultados mostram que o maior resíduo foi verificado justamente do instante $t = 0$, com um valor de -3,2. O instante $t = -8$ apresentou o menor resíduo, ou seja, foi o DCP em que ocorreu a melhor previsão deste voo; o valor real era de 9 posições de reservas e o modelo previu 9,72 posições neste instante.

**Figura 8: Valores Observados x Previstos do Vôos de Segunda-feira,
TBA300-27/09, 06:42h**



Um vôo com demanda consideravelmente baixa, verificada na amostra, foi o TBA309 do dia 28 de setembro (terça-feira). Nota-se que a qualidade da aderência do modelo foi alta, conforme mostra a Figura 9. Assim como a previsão para o exemplo do vôo anterior, neste caso a previsão do dia de partida foi a que apresentou o maior coeficiente do resíduo e, mesmo assim, o valor não diminui a qualidade da previsão.

**Figura 9: Valores Observados x Previstos do Vôos de Terça-feira,
TBA309-28/09, 10:40h**



A análise dos resultados permite dizer que o modelo estimado é capaz de se ajustar com um alto nível de eficiência às observações coletadas de número de reservas para o período $t = 0$, o que o qualifica como um modelo com boas potencialidades de previsão. Conforme foi dito, uma previsão acurada deste instante de tempo é de extrema valia no que tange ao processo de decisão quanto à implantação da estratégia de *overbooking* e os níveis a serem praticados pela empresa. Se a variação da demanda prevista para o dia de partida for superior à capacidade do vôo, o analista poderá optar por praticar ou não o *overbooking*, como forma de otimizar a receita gerada pela venda de passagens aéreas.

Tem-se, assim, que o adequado desenvolvimento de habilidades de previsão por parte das companhias aéreas, com relação ao processo de chegadas de pedidos em seus Sistemas de Reservas é etapa fundamental que visa ao objetivo de maximização de receitas; o modelo aqui proposto busca permitir avanços nestas habilidades.

CONCLUSÕES

O presente estudo buscou discutir o contexto da tomada de decisão das companhias aéreas com relação ao Sistema de Reservas e, mais especificamente, às práticas de *overbooking* no setor. Esta estratégia constitui um dos componentes de um sistema mais amplo das companhias aéreas, conhecido como Gerenciamento de Receitas (ou *Revenue Management*), cujo objetivo principal é proporcionar a otimização das receitas com vendas. O trabalho teve como objeto o desenvolvimento de um modelo empírico que permita analisar e prever o processo de chegada de reservas nos Sistemas de Reservas, usando como base de dados as informações obtidas através do Sistema de Reservas da companhia aérea Transbrasil, na ligação Rio de Janeiro/São Paulo, entre o Aeroporto Santos Dumont e o Aeroporto Internacional de Congonhas (Ponte-Aérea SDU/CGH).

A principal motivação para tal estudo foi o fato de que os modelos de previsão da demanda são elementos fundamentais no contexto do Gerenciamento de Receitas, dado que provocam impacto direto nos limites de reservas, fator determinante de lucratividade da empresa. O desempenho de um sistema de otimização como este depende, em grande parte, da freqüência e precisão das atualizações das informações relativas ao processo de chegadas, para que seja possível controlar os limites de assentos e número de classes de reservas em cada vôo.

No que tange a estratégia de *overbooking*, os modelos de previsão atuam definindo a melhor alternativa a ser adotada em relação à aceitação ou não de novas reservas, nos vôos mais demandados. A partir do conhecimento da demanda futura, é possível estabelecer políticas de reservas que permitam otimizar a receita total de passageiros em cada vôo oferecido.

O modelo empírico proposto neste trabalho foi ajustado pelo método de regressão de séries temporais, a partir da estrutura de dados em painel; a estimação dos coeficientes foi efetuada pelo estimador de *Huber-White (Sandwich Estimator)*, que controla os efeitos de heteroscedasticidade da amostra. O objetivo do modelo é determinar o número de reservas que serão efetuadas nos dias que antecedem a data de embarque de um vôo específico, ou seja, prever a demanda futura para cada dia do processo de reservas de um vôo direto (ou apenas um trecho do vôo) composto por apenas uma única classe tarifária.

Os resultados obtidos demonstraram a eficiência do modelo para a captura dos padrões de chegada da demanda, dadas as condições de mercado estabelecidas, ou seja, previsão da demanda de vôos diretos/um trecho e uma classe tarifária. O modelo pode ser usado para previsão em situações de *overbooking*, como também

uma ferramenta auxiliar no processo de decisão em relação ao número de reservas que deverão ser aceitas em uma classe tarifária específica de vôo futuro. É importante enfatizar, entretanto, que a alta complexidade das operações no transporte aéreo da atualidade faz com que a problemática da previsão das reservas seja ampliada em escala considerável. Isto porque uma companhia aérea no Brasil pode ter centenas de vôos por dia para serem gerenciados. Considerando-se, por exemplo, um portfolio formado por todos os vôos ao longo dos próximos 30 a 90 dias, seriam milhares de vôos a serem gerenciados a cada momento pela empresa. Um gestor de *overbooking* tem, portanto, uma tarefa altamente complexa e de árdua implementação. A sugestão do presente trabalho é que as empresas procurem investir pesadamente em tecnologia de informação, como forma de propiciar maior automatização das rotinas de previsão e de otimização das receitas. Neste ponto, a modelagem aqui desenvolvida apresenta vantagens, dado que a mesma pode ser incorporada, de maneira direta e simples, a um sistema automatizado de tomada de decisão.

Algumas limitações empíricas e metodológicas da modelagem devem ser ressaltadas. Em primeiro lugar, algumas variáveis relevantes na determinação da demanda encontram-se omitidas, como, por exemplo, preços, estrutura de tarifas, produtos origem-e-destino oferecidos (trechos), promoções de milhagem etc., tanto para a firma como para suas rivais. Este fator não foi considerado um problema na estimação, dado que, no período da amostra coletada, não foram observadas alterações nessas variáveis; para fins de exatidão na previsão fora do período amostral, entretanto, é fundamental estender o modelo com o uso de variáveis referentes à competição e ao mercado.

Em segundo lugar, por falta de dados, não foram incorporados na análise tanto os chamados passageiros *no-show* (que não comparecem ao embarque) quanto os passageiros *go-show* (que compram sua passagem no dia ou até momentos antes do embarque). Como recomendação de extensão ao trabalho, propõe-se a incorporação dos dados destes tipos de passageiros às informações de chegada no Sistema de Reservas, tendo em vista que o interesse último da empresa é a previsão da demanda real, e não apenas das posições de reservas no sistema. É fundamental, portanto, que a empresa mantenha uma sistemática de coleta dessas informações, de maneira a propiciar previsões de demanda mais sofisticadas.

Em terceiro lugar, tem-se como limitação o fato de que o trabalho, por utilizar uma base de dados cujo período amostral era relativamente curto, não permitiu a possibilidade de se estimar o efeito na demanda incorrido durante feriados específicos, finais de semana, dias de eventos, sazonalidade etc. A estimação dos efeitos desses fatores seria informação de alta relevância para o incremento das capacidades de previsão da firma, e somente poderia ser efetuada mediante a

obtenção de uma série temporal mais abrangente. Sugere-se como extensão, portanto, o uso de uma base de dados mais ampla, que possibilite a introdução de variáveis categóricas (binárias), de forma a identificar o efeito de fatores qualitativos deslocadores de demanda.

Por fim, é importante enfatizar que foram usados dados de uma empresa em situação atípica, em estado pré-falimentar. Naquelas circunstâncias, observou-se a demanda em níveis muito inferiores aos da oferta da firma no mercado. Desta forma, o exercício de previsão aqui efetuado deve ter seus resultados analisados com cautela no que tange a previsões quanto ao *overbooking* daquela empresa, naquela situação observada na amostra, porque o *overbooking* ocorre tipicamente em situações em que a demanda é maior do que a oferta, e não o contrário. A ênfase no estudo de caso apresentado deve ser dada apenas para se demonstrar como a modelagem pode ser utilizada, uma vez obtida uma base com dados reais. Promovidas estimativas com dados menos atípicos – outra sugestão para trabalhos futuros –, podem-se implementar, de maneira direta, as previsões de níveis adequados de *overbooking*.

Apesar do *overbooking* ser uma estratégia competitiva largamente utilizada por companhias aéreas em todo o mundo, em que tanto a empresa quanto os passageiros podem beneficiar-se desta prática, no Brasil ela é pouco conhecida e, principalmente, pouco esclarecida aos usuários do transporte aéreo. Assim, é essencial que sejam desenvolvidos estudos que tratem dos aspectos que envolvem esta estratégia, para que o mercado de transporte aéreo possa implantar as técnicas de Gerenciamento de Receitas de forma consistente, abrangendo todos os objetos que as compõem, permitindo a otimização dos recursos e as vantagens competitivas que podem ser oferecidas, e sem comprometer a qualidade no atendimento da demanda.

Artigo recebido em 13.12.2005. Aprovado em 12.03.2007.

NOTAS

¹ No Brasil, o hábito de cancelamento de reserva por parte dos passageiros não é comum. Na maioria das vezes, os passageiros simplesmente esperam que o prazo da reserva expire, ou quando o bilhete já foi adquirido simplesmente não comparecem ao embarque.

² Tempo de antecedência em relação à data de embarque.

³ Neste trabalho, quando for usado o termo **reserva** de assento, pretende-se dizer que a passagem aérea é reservada e paga, obrigatoriamente. Sempre que a intenção for fazer uso da palavra no sentido de reserva **sem pagamento do bilhete**, será devidamente mencionado.

⁴ Além disso, não é permitido que o passageiro marque o assento com antecedência, apenas no momento do *check-in*, nem a solicitação de serviços. O prazo para emissão do bilhete é de até 24 horas após a reserva e não são permitidas listas de espera.

⁵ Pode-se também trabalhar com percentual de ocupação da aeronave, ao invés de número de posições de reserva. Este procedimento pode contribuir para normalizar os dados e colocá-los em uma escala comparável. No caso em tela, como o tipo de aeronave era único (B737-300), esse procedimento teria pouco efeito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Departamento de Aviação Civil. (1996). *Anuário estatístico do transporte aéreo* (Vol. II). Dados Econômicos. Rio de Janeiro, Brasil.
- Departamento de Aviação Civil. (1997). *Anuário estatístico do transporte aéreo* (Vol. II). Dados Econômicos. Rio de Janeiro, Brasil.
- Departamento de Aviação Civil. (1998). *Anuário estatístico do transporte aéreo* (Vol. II). Dados Econômicos. Rio de Janeiro, Brasil.
- Departamento de Aviação Civil. (1999). *Anuário estatístico do transporte aéreo* (Vol. II). Dados Econômicos. Rio de Janeiro, Brasil.
- Departamento de Aviação Civil. (2000). *Anuário estatístico do transporte aéreo* (Vol. II). Dados Econômicos. Rio de Janeiro, Brasil.
- Departamento de Aviação Civil. (2001). *Anuário estatístico do transporte aéreo* (Vol. II). Dados Econômicos. Rio de Janeiro, Brasil.
- Marques, L. D. (2000). Modelos dinâmicos com dados em painel: revisão de literatura [Working Papers]. *Universidade do Porto*, Portugal.
- McGill, J., & Van Ryzin, G. J. (1999). Revenue management: research overview and prospects. *Transportation Science*, 33(2), 233-356.
- Mayo, D. (1999). *Contribuições para implementação do yield management em empresas aéreas brasileiras*. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- Oliveira, A. (2000). *Os impactos das estratégias de gerenciamento de receitas de ativos perecíveis na ligação Rio de Janeiro – São Paulo*. Dissertação de mestrado. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo, SP, Brasil.
- Oliveira, A. V. M. (2003). Simulating revenue management in an airline market with demand segmentation and strategic interaction. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 1(4), 301-317.

- Oliveira, A. V. M.,
Moreno, M. B., &
Müller, C. (2000).
Modelagem das chegadas em
sistemas de reservas de companhias
aéreas brasileiras. *Proceedings of the
Panamerican Conference in Traffic
and Transportation Engineering*,
Gramado, RS, Brasil, 11.
- Smith, R. P. (2000).
Estimation and inference with non-
stationary panel time-series data.
*Proceedings of the International
Conference on Logic and
Methodology*, Colônia, Alemanha, 33.
- Subramanian, J.,
Stidham, S., Jr., &
Lautenbacher, C. J. (1999).
Airline yield management with
overbooking, cancellations e no-
shows. *Transportation Science*,
33(2), 147-167.

APÊNDICE MATEMÁTICO

Seja o operador de diferenças Δ , definido da seguinte forma, sobre uma variável Y_t qualquer:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Logo pode-se extrair as seguintes, relações, representativas da segunda e terceiras diferenças (respectivamente, Δ^2 e Δ^3 , obtidas por sucessivas multiplicações de Δ):

$$\Delta^2 Y_t = (\Delta(\Delta Y_t)) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad \therefore$$

$$\Delta^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

e também,

$$\Delta^3 Y_t = (\Delta(\Delta^2 Y_t)) = \Delta(\Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}) = (\Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}) - (\Delta Y_{t-1} - \Delta Y_{t-2}) =$$

$$\Delta(Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}) =$$

$$= (Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}) - (Y_{t-1} - 2Y_{t-2} + Y_{t-3}) \quad \therefore$$

$$\Delta^3 Y_t = Y_t - 3Y_{t-1} + 3Y_{t-2} - Y_{t-3}$$

Suponha um processo definido como $Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \Delta^2 Y_t + \beta_3 \Delta^3 Y_t + \varepsilon_t$. Pretende-se demonstrar que nele está implícito um processo Autoregressivo AR(2) em Y_t (do tipo $Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-2} + \xi_t$), transformado pela 1ª diferença.

Para fins de demonstração, o termo do erro não será representado nos desenvolvimentos a seguir. Assim, parte-se da seguinte expressão:

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \Delta^2 Y_t + \beta_3 \Delta^3 Y_t$$

Efetuando a 1ª diferença e aplicando a restrição de que $\beta_1 = 1$, tem-se que

$$Y_t = Y_{t-1} + \beta_2 (\Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}) + \beta_3 [(\Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}) - (\Delta Y_{t-1} - \Delta Y_{t-2})]$$

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \beta_2 \Delta Y_t - \beta_2 \Delta Y_{t-1} + \beta_3 \Delta Y_t - \beta_3 \Delta Y_{t-1} - \beta_3 \Delta Y_{t-1} + \beta_3 \Delta Y_{t-2}$$

$$\Delta Y_t - \beta_2 \Delta Y_t - \beta_3 \Delta Y_t = -(\beta_2 + 2\beta_3) \Delta Y_{t-1} + \beta_3 \Delta Y_{t-2}$$

$$(1 - \beta_2 - \beta_3) \Delta Y_t = -(\beta_2 + 2\beta_3) \Delta Y_{t-1} + \beta_3 \Delta Y_{t-2}$$

APÊNDICE MATEMÁTICO (conclusão)

$$Y_t = -\frac{\beta_2 + 2\beta_3}{1 - \beta_2 - \beta_3} \Delta Y_{t-1} + \frac{\beta_3}{1 - \beta_2 - \beta_3} \Delta Y_{t-2}$$

Renomeando os termos, pode-se definir

$$\alpha_1 = -\frac{\beta_2 + 2\beta_3}{1 - \beta_2 - \beta_3} \text{ e } \alpha_2 = \frac{\beta_3}{1 - \beta_2 - \beta_3}, \text{ então}$$

$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2}$ ($\div \Delta$), que equivale a somar Y_{t-1} em ambos os lados, tem-se:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} \text{ (ou } Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2}) \blacksquare$$