Scientia Et Technica
ISSN: 0122-1701
scientia@utp.edu.co
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia

Fernández Sánchez, Oscar; González Granada, José Rodrigo; Escobar Callejas, Carlos Mario
Euler, números primos y la función zeta
Scientia Et Technica, vol. XVII, núm. 52, diciembre, 2012, pp. 116-121
Universidad Tecnológica de Pereira
Pereira, Colombia

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84925149025

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Euler, números primos y la función zeta

Euler, prime numbers and the zeta function

Oscar Fernández Sánchez, José Rodrigo González Granada, Carlos Mario Escobar Callejas
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
oscarf@utp.edu.co
jorodryy@utp.edu.co
ccescobar@utp.edu.co

***Resumen*—En este articulo se muestran principalmente, la contribución de Leonhard Euler al surgimiento de la función ζ(x), y las primeras relaciones entre esta y los números primos.**

Palabras clave: **Números primos, serie numérica, función zeta.**

***Abstract*— this paper shows mainly, Leonhard Euler's contribution to the emergence of the function ζ (x), and the first relationships between this and the prime numbers.**

Key Word: **Prime numbers, numerical series, zeta function**.

I. INTRODUCCIÓN

Si se va a hablar de números primos, no sobra recordar su definición. Así mismo recordar la metáfora que en su momento se uso para referirse a estos números. He aquí la definición:

Definición: Un entero n se llama primo si $n>1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si $n>1$ no es primo, entonces n se llama compuesto (Apostol, 1980, p. 19).

Ahora la metáfora con la cual se nombró a los números primos: El nombre de *número primo* (πρώτος αριθμός) o *primer número* fue dado por el matemático de la Grecia Antigua, Nicómaco, porque sólo puede determinarse colocando juntas un cierto número de unidades, y la unidad es el comienzo del número. También de acuerdo con Jámblico, otro matemático de la Grecia Antigua, porque no hay otro número menor que este, que sea una colección de unidades, del cual éste sea múltiplo, y porque es el *primero* de los números de una base para otros números que son múltiplos de este (Euclides, 1956, p. 285).

Para el desarrollo de la temática a presentar, es necesario con miras a dar claridad a lo aquí expuesto, citar algunos teoremas que se utilizarán.

Teorema 1: Si x es complejo con $|x| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x^n}$ converge y tiene suma $\frac{1}{1-x}$ **.** Demostración en (Apostol, 1972, p. 475).

Teorema 2 (Proposición VII. 32): Cualquier número entero n>1 o es primo o es producto de números primos. Demostración en (Euclides, 1956, p. 333).

Teorema 3 (Proposición VII. 20): Existe una infinidad de números primos.

Demostración: (Euclides, 1956, p. 413) Supóngase que solo existe un número finito de números primos, sean estos $p_1, p_2, \dots, p_n$. Ahora, considérese el producto $p_1 p_2 \dots p_n$ y súmesele 1. Entonces puesto que $p_1 p_2 \dots p_n + 1 > 1$, por teorema 2, o es primo o no es un número primo.

Si es un número primo, se ha adicionado un primo a los ya dados. Si no lo es, debe ser divisible por algún número primo p. Ahora este p no puede ser ninguno de los números primos $p_1, p_2, \dots, p_n$. Porque si esto es así, p dividiría al producto $p_1 p_2 \dots p_n$. Y, puesto que p divide a $(p_1 p_2 \dots p_n + 1)$, también divide a la diferencia, es decir, a 1, lo cual es imposible.

De esto se deduce que se ha obtenido un nuevo número primo, y el proceso puede ser extendido tanto como se quiera. □

Esta es la demostración clásica que se muestra en un curso introductorio de Teoría de Números, donde se recalca la belleza de su simplicidad. Sin embargo, no es la única demostración en este sentido; posterior a Euclides (330 a. C. – 275 a. C.), matemáticos de la talla de Leonhard Euler (1707-1783) han demostrado la infinitud del conjunto de los números primos usando caminos diferentes, aunque no tan simples, pero con una belleza propia, si se aprecia su genialidad.

Fecha de Recepción: 12 de Septiembre de 2012
Fecha de Aceptación: 15 de Diciembre de 2012

II. EULER Y LOS NÚMEROS PRIMOS

2.1 Euler y la infinitud de los números primos

Para seguir dicha demostración es necesario considerar el teorema 1. Este teorema permite visualizar una identidad que Euler descubrió y demostró en 1737, la cual muestra una relación entre los números naturales y los números primos.

Para esto, considérese un número primo p, el cual satisface el hecho que $0 < \frac{1}{p} < 1$ y $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$. Así para un número real x, con $x>1$, se cumple que $0 < \frac{1}{p^x} < 1$ y por tanto, en virtud del teorema 1, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{nx}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}}$$

Ahora, puesto que p es un número primo arbitrario, en realidad se está considerando todo el conjunto de los números primos. De esta igualdad se tiene que

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^x}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^x}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^x}}\right)\ldots = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{nx}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{nx}}\right)\ldots$$

Al efectuar el producto de las series al remplazar a p por cada número primo, se obtiene

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{nx}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{nx}}\right)\ldots = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{2^{2x}} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{(2.3)^x} + \cdots$$

Si se observa, los denominadores de los términos de la serie, al lado derecho de la igualdad, son todos los números enteros mayores que 1, donde todos aquellos que no son primos están expresados como producto de potencias de números primos. Así, en virtud del Teorema Fundamental de la Aritmética, cada número entero mayor que 1 se puede representar de forma única como un producto de números primos (Apostol, 1980, p. 20), esta serie se puede escribir como

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{2^{2x}} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{(2.3)^x} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^x}$$

La serie del lado derecho de esta última igualdad es una serie convergente para cualquier valor de x mayor que 1, y define para todo valor real $x>1$ la función zeta, la cual se denota como $\zeta(x)$ (Courant y Robbins, 2002, p. 525), es decir,

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^x}\ , con\ x > 1.$$

En este punto ya es posible exponer la identidad encontrada por Euler y mencionada antes. De la forma como se dedujo la expresión en sumatoria para la *función zeta*, se tiene que

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^x} = \prod_{p=primos}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}\right)$$

La expresión en el lado derecho de esta igualdad es uno de los llamados *productos de Euler* (Apostol, 1980, p. 286). Euler utilizó esta identidad para demostrar la infinitud del conjunto de los números primos.

Para ver como lo hizo, antes es necesario considerar otro problema. Y es el de demostrar que la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$$

que es la llamada serie armónica, diverge. Pero esta serie es precisamente el valor de la función zeta en $x = 1$, es decir,

$$\zeta(1) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j},$$

El matemático, astrónomo y físico francés, Nicolás de Oresme (1323-1382) demostró que esta serie es divergente. Él agrupa los términos de la suma extendida de la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Y los compara con los términos de la siguiente suma

$$\begin{aligned} &1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es claro que comparando los términos agrupados desde el tercero se da una desigualdad y por consiguiente,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} > 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}$$

Y así, dado que la serie del lado derecho diverge, la serie armónica diverge (Courant y Robbins, 2002, p. 525). $\square$

Ahora, retomando la función zeta igualada al producto de Euler, se muestra como procedió para mostrar la infinitud de los números primos usando a $\zeta(1)$.

Demostración de Euler de que hay infinitos números primos:

Sugerida en (Apostol, 1980, pp. 279, 297). Tomando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j} = \prod_{p}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

Se tiene

$$ln\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\right) = ln\left(\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

Aplicando la propiedad $ln(a.b) = ln(a) + ln(b)$, se obtiene

$$ln\left(\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) = \sum_{p} ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

De igual manera, dado que $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)\,, para\ b > 0$, se tiene que

$$\sum_{p} ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) = \sum_{p} -ln\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Ahora remplazando $-ln\left(1-\frac{1}{p}\right)$ por su expansión en serie de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{p} -ln\left(1-\frac{1}{p}\right) &= \sum_{p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}+\cdots\right)\\ &= \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+\sum_{p}\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{4p^2}+\cdots\right)\\ &< \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+\sum_{p}\frac{1}{p^2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

Remplazando la suma de la serie geométrica de los términos que aparecen entre paréntesis en el segundo término del lado derecho de la desigualdad, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{p} -ln\left(1-\frac{1}{p}\right) &< \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+\sum_{p}\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)\\ &= \left(\sum_{p}\frac{1}{p}\right)+\sum_{p}\frac{1}{p(p-1)}\\ &= \sum_{p}\frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

Se ha llegado a

$$\sum_{p}\frac{1}{p-1} > ln\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\right)$$

En este punto, considérese un número primo *p*, sea p_{-} el primo anterior a *p*, entonces se cumple que $p-1 > p_{-}$, para todo par de primos *p*, $p_{-} > 2$. De modo que $\frac{1}{p_{-}} > \frac{1}{p-1}$, y se deduce entonces

$$\sum_{p}\frac{1}{p} > \sum_{p}\frac{1}{p-1} > ln\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\right)$$

Y por la divergencia de la serie armónica, la serie de recíprocos de números primos diverge, lo que implica la existencia de una infinitud de números primos. $\square$

Para valores de *x* mayores que 1 (*x*>1), la función $\zeta(x)$converge.

Evaluar la función zeta en otros valores, implica determinar la convergencia de la serie de potencias determinada por dicho valor particular de x.

2.2 Euler y la convergencia de $\zeta(2)$

El caso *x* = 2, es decir

$$\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

fue un problema propuesto por vez primera en 1644 por el matemático Pietro Mengoli, y popularizado entre la comunidad matemática de la época por el matemático Jakob Bernoulli en 1689. Aunque ellos no lograron demostrarlo. Fue Leonhard Euler quien logró su demostración y dado que él y Bernoulli residían en Basilea, ciudad suiza ubicada en la frontera con Francia y Alemania, a este problema se le conoce como el "problema de Basilea".

Enseguida se muestra la manera como Euler realizó dicha demostración. Del Cálculo elemental se sabe que la función *f*(*x*) = *Sen*(*x*) se puede expresar como una suma infinita así (Apostol, 1976, p. 534):

$$Sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Las raíces de esta función son $x = k\pi$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Entonces por el Teorema Fundamental del Álgebra, se tiene que el polinomio del lado derecho de la igualdad se puede expresar como el producto (Kostrikin, 1992, p. 230):

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots = Cx(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\ldots$$

$$= Cx(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)\ldots$$

Dado que $x^2 - (k\pi)^2 = 0$, los factores se pueden escribir como

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots = Cx\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots$$

Se divide entre *x* a cada lado de esta igualdad y se obtiene:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = C\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots$$

Ahora puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen(x)}{x} = 1$$

Se tiene que *C* = 1. Por tanto la igualdad queda:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots$$

Y por igualdad de polinomios. En consecuencia los términos de igual grado a ambos lados de la igualdad son iguales. En particular el término en x^2, para el cual se tiene que:

$$-\frac{x^2}{3!} = -\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} - \cdots$$

Ahora se multiplica por $-\pi^2$ y se divide entre x^2 a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{\pi^2}{3!} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Y se obtiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Que es el resultado deseado. □

2.3 Otra demostración de la convergencia de $\zeta(2)$

Esta demostración esta sugerida en (Edwards y Penney, 1996, p. 638). Y se trabaja en cursos de cálculo elemental.

Primero se resuelve por partes la integral

$$\int_0^1 \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} u\,du = \frac{\pi^2}{8} \qquad (1)$$

Para lo cual se hizo *u* = *arcsen*(*x*) y $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces si *x* = 0, *u* = 0 y si *x* = 1, $u = \pi/2$.

Ahora se muestra que

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

Para esto se considera la serie binomial

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Con $|x| < 1$. Si se hace α = -1/2 y se remplaza x por $-x$ se tiene que los términos de la serie dan positivos todos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{(-1/2)}{1!}(-x) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}(-x)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n + \cdots$$

Se ha obtenido que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n \qquad (2)$$

Dado que $2^n n! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$. Es fácil verificar esto último:

Demostración: Para n = 2, se tiene que $2^2 2! = 2\cdot 4$.

Se supone que la igualdad se cumple para el caso n = k, esto es, que $2^k k! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)$ y se verifica para el caso n = k+1, esto es:

$$2^{(k+1)}(k+1)! = 2^k k!\, 2(k+1) = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)[2(k+1)]$$

Que es el resultado que se requiere. □

Si en (2) se sustituye x por t^2 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}t^{2n} \qquad (3)$$

Con $|t| < 1$. Ahora puesto que $\frac{d}{dt}[arcsen(t)] = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, se tiene que:

$$arcsen(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Si $|x| < 1$.

Volviendo a la integral

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Con el cambio de variable $x = Sen(u)$, se obtiene la integral:

$$\int_0^{\pi/2} Sen^{(2n+1)}(u)du = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

Esta identidad se obtiene usando integración por partes con $v = Sen^{2n}(u)$ y $dw = Sen(u)du$.

Se ha encontrado que:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \qquad (4)$$

Ahora al integrar (3) término a término de t = 0 a t = x, se obtiene:

$$arcsen(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Ahora se dividen el primero y último lados de esta igualdad entre $\sqrt{1-x^2}$ para luego integrar a ambos lados de x = 0 a x = 1.

$$\int_0^1 \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+1)}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Aplicando el resultado obtenido en (4) se obtiene:

$$\int_0^1 \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+1)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$$

Al simplificar queda:

$$\int_0^1 \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \qquad (5)$$

Ya esta todo para el resultado esperado. Por (1) y (5) se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$(1-\frac{1}{4})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Y esto termina la demostración. □

III.CONCLUSIÓN

Se han mostrado dos resultados que fueron trascendentales en el estudio de los números primos, como son la demostración clásica hecha por Euclides de su infinitud y una demostración de este mismo hecho, realizada siglos después por Leonhard Euler. Así mismo, se han mostrado los aportes iniciales de este último al encontrar una identidad que relaciona a los números primos con los números naturales a través de los llamados productos de Euler. Esta identidad constituye la llamada función zeta. Nicolas de Oresme muestra que la función zeta en 1 genera una serie divergente. Euler muestra de una manera bastante bonita, dada su simplicidad, como hallar el valor de dicha función en 2, y se presenta una forma alternativa de hallar dicho valor de la función zeta, una entre las muchas que se han hecho, desde aquel momento en que Euler presentara por primera vez su demostración allá en Basilea, aquella ciudad suiza que vio nacer a este brillante matemático. Esta demostración hace el desarrollo de este mismo resultado a través de cálculo elemental.

REFERENCIAS

[1]. Apóstol, T. (1976). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal*. Barcelona: Reverté.

[2]. Apóstol, T. (1980). *Introducción a la Teoría Analítica de Números*. Barcelona: Reverté.

[3]. Clawson, C. (1980*). Misterios matemáticos. Magia y belleza de los números*. Trad. Ramiro Castañeda García. México D.F.: Diana.

[4]. Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. Prefacios y avances recientes por Ian Steward*. Trad. Martin Manrique Mansour. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

[5]. Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con Geometría Analítica*. México, D.F.: Prentice Hall.

[6]. Euclides (1956). *The thirteen books of the Elements*. Trad. Sir Thomas L. Heath. V. 2 (Books III-IX). New York: Dover.

[7]. Kostrikin, A. (1992). *Introducción al Álgebra*. Segunda Edición. Trad. Roberto A. Sala. Madrid: McGraw-Hill.