Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos

Guillermo Cervantes Campo,
Rafael Martínez Solano

próxima zona


Enrique Grau. *Historia de amor*, 1987.
Óleo sobre lienzo, 140 x 110 cm

GUILLERMO CERVANTES CAMPO
MAGISTER EN EDUCACIÓN, UNINERSIDAD DEL NORTE. MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD NACIONAL. PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL NORTE
(gcervant@uninorte.edu.co)
RAFAEL MARTÍNEZ SOLANO
MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL VALLE-UNIVERSIDAD DEL NORTE. PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL NORTE.
(rmartinez@uninorte.edu.co)

zona próxima
Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación Universidad del Norte

nº 8 diciembre, 2007
ISSN 1657-2416

RESUMEN

En este documento se muestran los resultados de una investigación cuyo objetivo era describir algunos tipos de errores que, con mayor frecuencia, presentan los alumnos en los primeros cursos de pre-grado cuando pretenden solucionar ejercicios que requieren manipulaciones algebraicas; además, se trató de identificar las posibles fuentes del error y establecer una alternativa metodológica que permitiera minimizar la presencia de estos tipos de errores

PALABRAS CLAVE: Errores, álgebra, ecuaciones, inecuaciones, ejemplos contrastantes.

ABSTRACT

This paper presents the results of a research which attempted to describe some types of mistakes first semester undergraduate students frequently show when they want to find solutions for problems that need algebraic manipulations. In addition, the study aimed at identifying some possible mistakes sources and proposing a methodological alternative way in order to minimize these mistakes.

KEY WORDS: Mistakes, Algebra, Equations, Inequality

FECHA DE RECEPCIÓN: JULIO DE 2007
FECHA DE ACEPTACIÓN: OCTUBRE DE 2007

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de nuestra experiencia docente hemos notado cómo cierto tipo de errores prevelacen en el desarrollo de ejercicios en donde se requiere de cierto manejo algebraico. Aun después de ser señalados como errores y presentar alternativas correctas, su ocurrencia siendo notoria.

Los errores forman parte de lo que produce un estudiante en el proceso de aprender Matemáticas y se constituyen, para muchos, en elementos estables dentro del mismo proceso, constituyéndose en señales de serias deficiencias en los desarrollos algebraicos llegando a convertirse, en muchos casos, en causa de fracaso académico.

A partir de una muestra de dichos errores, intentaremos explicar posibles aspectos que conducen o favorecen su aparición, así como posibles estrategias que lleven a minimizar su presencia en los desarrollos algebraicos de nuestros alumnos.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Como premisas orientadoras de nuestra práctica docente y algunas formas de vislumbrar la problemática de los errores en los desarrollos algebraicos, podemos mencionar:

a. El conocimiento matemático es construido a través de un proceso de abstracción reflexiva, lo cual activa las estructuras cognitivas existentes en el constructor (estudiante). Estas estructuras cognitivas están en desarrollo continuo y pueden ser transformadas mediante actividades con propósitos específicos (Gómez, Kilpatrick y Rico, 1995).
b. Los errores son defectos o averías que se producen durante el proceso de construcción del conocimiento o del desarrollo de las estructuras cognitivas, y son elementos usuales en el camino hacia el verdadero conocimiento, ya que al tratar de superarlos se pone en juego el ejercicio de la autocrítica, el sometimiento a prueba del conocimiento adquirido en diversos contextos y las diversas aproximaciones a la realidad construidas por el individuo (Popper, 1979).

Bajo estas consideraciones, el error observado puede señalar un camino contrastante en la forma como se presentan los bloques que permitan construir un sólido conocimiento de los procesos algebraicos por parte de nuestros alumnos.

3. ALGUNOS TIPOS DE ERRORES

Cuando un estudiante ingresa a la universidad se presupone, por parte de los docentes, la existencia de un correcto manejo de la Aritmética y el Álgebra. Si bien el errar es de humanos, últimamente los errores en los desarrollos algebraicos son cada vez más frecuentes al punto que un nutrido número de alumnos los considera propiedades válidas y las utilizan con pasmosa naturalidad.

Entre la serie de errores observados entre nuestros estudiantes, merecen especial atención los siguientes:

a. **Error de linealización**

Uno de los tipos de errores más frecuentemente observado es el denominado error de linealización. Sumamente curioso por el hecho de que las funciones denominadas transformaciones lineales no son estudiadas en los cursos regulares de Álgebra y Trigonometría; sin embargo la tendencia a linealizar es demasiado frecuente y atractiva por su simplicidad, tal y como se presenta en las siguientes situaciones:

$$\mathbf{F(x + y) = F(x) + F(y)}$$
$$(x + y)^n = x^n + y^n$$
$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$1/(x + y) = (1/x) + (1/y)$$
$$\ln(x + y) = \ln x + \ln y$$
$$\cos(x + y) = \cos x + \cos y$$

$$\mathbf{F(ax) = aF(x)}$$
$$\ln(3x) = 3\ln x$$
$$(2x)^2 = 2x^2$$
$$\sqrt{2x} = 2\sqrt{x}$$
$$\tan(2x) = 2\tan x$$
$$\ln(3x) = 3\ln x$$

Es muy probable que este tipo de error surja cuando el estudiante o preserva la estructura de las primeras propiedades algebraicas que se le presentan o las percibe de una manera incompleta.

Estas primeras propiedades algebraicas fundamentales presentan la forma

$$f(x \cdot y) = f(x)*f(y),$$

por ejemplo:

$$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$$
$$\sqrt{x.y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$
$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

Consideramos que, después de presentarse cada una de estas propiedades básicas, es importante confrontar al estudiante con una nueva situación en la que, de acuerdo con lo observado, es probable que cometa un error de linealización.

Así, a manera de ejemplo, después de demostrar que $(x.y)^2 = x^2.y^2$, debe contrastarse con la prueba de $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ lo cual permite, primero que todo, reforzar la idea de lo que es la potenciación como operación y luego resaltar el efecto de la adición, u otra operación, sobre el resultado, al analizar los diferentes axiomas para los números reales que se utilizan en cada una de las pruebas. Además, la extensión del contraste; esto es, repetir el proceso para $(x.y)^3$ y $(x+y)^3$, $(x.y)^4$ y $(x+y)^4$ e incluso $(x.y)^5$ y $(x+y)^5$ permite en cada paso que el estudiante aprecie cuán diferentes son estas expresiones e incluso se aventure a lanzar conjeturas acerca de cómo desarrollar $(x.y)^n$ y $(x+y)^n$.

b. **Error de extensión de la cancelación**

Otro tipo de error fuertemente arraigado entre nuestros alumnos lo hemos denominado extensión de la cancelación. A partir de las identidades

$$\frac{AB}{AC}=\frac{B}{C} \qquad (1)$$

$$\frac{AB+AD}{AC}=\frac{B+D}{C} \qquad (2)$$

generan otras no válidas como

$$\frac{AB+CD}{AC}=B+D$$

$$\frac{AB+CD}{A+C}=B+D$$

$$\frac{B+AD}{C}=\frac{B+D}{C}$$

Es posible que al presentarle a los alumnos por primer vez las identidades (1) y (2) quede grabada más la acción de cancelar algo que la forma de la identidad en sí. Consideramos que es preferible presentar (2) en la forma

$$\frac{AB+AD}{AC}=\frac{A(B+D)}{AC}=\frac{B+D}{C} ,$$

haciendo énfasis en la importancia del factor común para una correcta simplificación.

Entre otros, hemos observado los siguientes errores que encajan dentro de este tipo:

$$\frac{\sqrt{X(4-X)}+8-2X}{4-X}=\sqrt{X}+8-2X$$

$$\frac{X-Y}{X^2-Y^2}=\frac{1}{X-Y}$$

$$\frac{X^3-Y^3}{X^3Y-XY^3}=\frac{1}{Y-X} .$$

Como una actividad que refuerce la importancia de un factor común en el numerador y el denominador de una expresión fraccionaria como requisito indispensable para la simplificación, sugerimos presentar desarrollos errados para generar opiniones divididas, las cuales, al sustentarse, permiten al estudiante una reflexión más profunda y una visión más crítica de lo que piensa y hace.

c. **Error de extensión del producto nulo**

Este tipo de error tiene como punto de partida la conocida propiedad
Si $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (3)

y una ecuación como $(x + 1)(x - 2)= 0$ es fácilmente resuelta aplicando (3); así:

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2) = 0 & \rightarrow \\ x+1=0 \ \vee \ x-2=0 & \rightarrow \\ x=-1 \ \vee \ x=2 & \end{aligned}$$

la cual al ser trasladada a una situación que al alumno le parece similar, lleva al curioso resultado

Si $a \cdot b = d \rightarrow a = d \vee b = d$ (4)

el cual se produce al considerar cierta parte de la fórmula como elemento no esencial de ella; por ello es muy frecuente encontrar que al resolver una ecuación cuadrática como $(x + 1)(x - 2)=10$ se proceda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2) = 10 & \rightarrow \\ x+1=10 \ \vee \ x-2=10 & \rightarrow \\ x=9 \ \vee \ x=12 & \end{aligned}$$

obteniéndose, obviamente, resultados incorrectos.

Aquí consideramos que después de presentar aplicaciones de (3), inmediatamente presentar el contraste con la situación (4) y cómo proceder, procurando que en el desarrollo del ejemplo contrastante aparezca (3); así:

$$\begin{aligned} (x+2)(x+1) &= 12 \rightarrow \\ x^2+3x+2 &= 12 \rightarrow \\ x^2+3x-10 &= 0 \rightarrow \\ (x+5)(x-2) &= 0 \rightarrow \\ x+5=0 \ \vee \ x-2 &= 0 \rightarrow \\ x=-5 \ \vee \ x &= 2. \end{aligned}$$

Planteando una situación más general, puede proponerse un ejemplo contrastante un poco más complejo, como

$$\begin{aligned} (x-2)(x+1) &= 9 \rightarrow \\ x^2-x-2 &= 9 \rightarrow \\ x^2-x-11 &= 0 \rightarrow \\ (x^2-x+\tfrac{1}{4})-\tfrac{1}{4}-11 &= 0 \rightarrow \\ (x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{45}{4} &= 0 \rightarrow \\ (x-\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{\sqrt{45}}{2})^2 &= 0 \rightarrow \\ (x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{45}}{2})(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{45}}{2}) &= 0 \rightarrow \\ x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{45}}{2}=0 \ \vee \ x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{45}}{2} &= 0 \rightarrow \\ x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{45}}{2} \ \vee \ x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{45}}{2} & \end{aligned}$$

d. **Errores de truncamiento**

Este tipo de errores se origina cuando se trunca u omite parte de una fórmula. Una muestra de ello es común que resulta cuando a partir de las expresiones

$a \cdot b > 0 \rightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (5)

$a \cdot b < 0 \rightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a>0 \wedge b<0)$ (6)

se obtenga:

$a \cdot b > 0 \rightarrow a > 0 \wedge b > 0$
$a \cdot b < 0 \rightarrow a > 0 \wedge b < 0$

por ello es muy frecuente que al resolver una inecuación como $(x + 1)(x - 2) > 0$ algunos procedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(x+1)(x-2) > 0 &\rightarrow x+1 > 0 \wedge x-2 > 0\\ &\rightarrow x > -1 \quad \wedge x > 2\\ &\rightarrow x \in]-1, \infty[\cap]2, \infty[\\ &\rightarrow x \in]2, \infty[\ ,\end{aligned}$$

obteniendo sólo parte del conjunto solución de la inecuación.

Es posible que el error por truncamiento sea alentado por la consecución de respuestas iguales a las producidas por la correcta aplicación de la fórmula; como en el caso

$$\begin{aligned}(x+1)(x-2) < 0 &\rightarrow x + 1 > 0 \wedge x - 2 < 0\\ &\rightarrow x > -1 \quad \wedge x < 2\\ &\rightarrow -1 < x < 2 \ ,\end{aligned}$$

donde se obtiene una respuesta correcta con base en un procedimiento errado.

Para este caso en particular, luego de explicar el procedimiento analítico para su solución basados en (5) o (6), presentamos al alumno como alternativa el denominado método gráfico y llevaremos al alumno a que lo prefiera sobre el método analítico, como una manera de hacer visible el comportamiento de los signos de las expresiones algebraicas involucradas en la inecuación.

4. CONCLUSIONES

Apoyados en nuestra experiencia, y en algunas ideas desarrolladas en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learninig* (1992) y en Lakatos (1978) podemos afirmar que muchos errores se presentan como resultado de uno de los siguientes procesos:

a. Tendencia generalizada a usar reglas, propiedades y definiciones de la primera forma en que fueron vistas, prefiriéndose incluso sobre formas más claras y eficientes.
b. Uso inapropiado de una regla conocida en una situación nueva.
c. Adaptación incorrecta de una regla conocida al resolver un nuevo problema.
d. Asumir que en una regla general uno de sus componentes es más incidental que esencial.

Es claro que nuestra labor debe encaminarse a evitar en lo posible que estos procesos generen errores, por ello proponemos presentar siempre como situaciones contrastantes aquellas que sabemos suelen aparecer con mayor frecuencia resueltas de manera errónea.

Es posible que en la búsqueda de las situaciones contrastantes nos alejemos de los esquemas tradicionales en el desarrollo de las asignaturas, pero debemos considerar que nuestros alumnos tienen experiencias algebraicas previas y que es más importante generar un conflicto cognitivo en él que lo lleve a un replanteamiento de sus esquemas y procedimientos algebraicos.

Referencias

GÓMEZ, P., KILPATRICK. J., RICO, L. (1995). *Educación Matemática*. Bogotá, Colombia: Iberoamericana.

POPPER, K. (1979). *El desarrollo del conocimiento científico*. México D.F.: Siglo XXI.

Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (1992). New York: Mac Millan.

LAKATOS, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento Matemático*. Madrid: Alianza Universidad.