



Ciencia e Ingeniería Neogranadina

ISSN: 0124-8170

revistaing@unimilitar.edu.co

Universidad Militar Nueva Granada

Colombia

Niño-Suárez, Paola; Velasco Villa, M.; Aranda Bricaire, E.  
Discretización exacta de un robot móvil con retardo de transporte  
Ciencia e Ingeniería Neogranadina, vol. 16, núm. 1, agosto, 2006, pp. 43-53  
Universidad Militar Nueva Granada  
Bogotá, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=91116104>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica  
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

**DISCRETIZACIÓN EXACTA DE UN ROBOT MÓVIL CON  
RETARDO DE TRANSPORTE**

---

**EXACT DISCRETIZACIÓN OF A MOVABLE ROBOT WITH  
TRANSPORT RETARDATION**

---

*Fecha de Recepción: 7 de julio de 2006*  
*Fecha de Aprobación: 2 de agosto de 2006*

*Paola Niño-Suárez<sup>1</sup>*  
*M. Velasco Villa<sup>2</sup>*  
*E. Aranda Bricaire<sup>2</sup>*

---

**RESUMEN**

*En este trabajo se presenta la obtención del modelo exacto en tiempo discreto de un robot móvil tipo (2,0), bajo la consideración de la existencia de retardos de transporte en la señal de control, producidos por la propagación de las señales entre los sensores y actuadores del robot y el control remoto. El modelo obtenido es evaluado mediante simulación, comparando su desempeño con un modelo discreto aproximado que incluye también retardos de transporte y con el modelo en tiempo continuo del mismo sistema.*

**ABSTRACT**

*An exact discrete time model of a mobile robot of the type (2,0) that includes the time-delay induced by a communication network between the sensors and actuators on the mobile robot and the remote control system is presented. Simulations results are provided to show the performance of the proposed exact discrete time model. The performance of obtained model is better compared to the approximate model because it does not need a sampling period sufficiently small.*

---

<sup>1</sup> P. A. Niño-Suárez, Docente del programa de Ingeniería Mecatrónica de la U.M.N.G. y estudiante de Doctorado de la Sección de Mecatrónica del Departamento de Ingeniería Eléctrica del CINVESTAVIPN. [asuarez@umng.edu.co](mailto:asuarez@umng.edu.co)  
<sup>2</sup> M. Velasco-Villa y E. Aranda-Bricaire, Investigadores Titulares de la Sección de Mecatrónica del Departamento de Ingeniería Eléctrica del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV-IPN. C.P. 07300 México, D.F., México. [velasco@cinvestav.mx](mailto:velasco@cinvestav.mx), [earanda@cinvestav.mx](mailto:earanda@cinvestav.mx)

---

## I. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles son dispositivos electromecánicos capaces de desplazarse en un espacio de trabajo con cierto grado de autonomía. De acuerdo a su forma de locomoción se clasifican en: robots móviles de locomoción mediante orugas, mediante patas y mediante ruedas. Los robots móviles propulsados por ruedas a su vez, se clasifican de acuerdo al número y al tipo de grados de libertad. En los robots móviles se presentan dos tipos de grados de libertad, el grado de movilidad y el grado de direccionabilidad. El grado de movilidad es un grado de libertad asociado a una variable de velocidad del robot y el grado de direccionabilidad es un grado de libertad asociado a una variable de dirección del robot, [ 1].

En este trabajo se considera un robot móvil propulsado por ruedas, que posee dos grados de movilidad y cero grados de direccionabilidad, de ahí su denominación de robot móvil tipo (2,0).

Es amplio el número de investigaciones que se han desarrollado, tomando como objeto de estudio los robots de locomoción mediante ruedas, motivadas en parte, por la simplicidad de su estructura. Son sistemas cuyos modelos matemáticos se clasifican como sistemas no lineales presentando restricciones no holónomas. Una restricción no holónoma es una restricción no integrable en términos de las velocidades del robot.

Actualmente, los esquemas de control desarrollados para robots móviles, en su mayoría se obtienen a partir de los modelos en tiempo continuo, pero su implementación en tiempo real se

realiza en sistemas de procesamiento digital de datos. Esto no es un inconveniente siempre que el sistema de computo posea una alta velocidad de operación. En el caso contrario, cuando no se logra reducir el periodo de muestreo a un valor suficientemente pequeño, los esquemas de control implementados de esta forma presentan un deterioro apreciable en el desempeño general del sistema.

La principal ventaja de utilizar un controlador discreto y un modelo discreto exacto del sistema, es que no se tiene como restricción de trabajo el periodo de muestreo considerado y por lo tanto se puede utilizar en su implementación un sistema de computo de menor velocidad y por lo tanto de menor costo.

Utilizando el modelo continuo se han reportado diversos trabajos que resuelven el problema de seguimiento de trayectorias mediante diferentes técnicas. En [2] se presenta un control continuo por pedazos para estabilizar exponencialmente al sistema a lo largo de una trayectoria. En [3] se presenta un control basado en la linealización por retroalimentación dinámica con el que se obtiene un alto desempeño siempre y cuando el robot permanezca en movimiento. En [4] se presenta un control estabilizante de tipo híbrido para un robot móvil de tipo (2, 0) que utiliza un controlador conformado por dos partes, una discreta para estabilizar el error en la dirección de manejo y una parte continua para estabilizar el error lateral. En [5] se propone un control conmutado entre una ley de control linealizante y una ley de control variante en el tiempo. En [6] se propone utilizar un control PID para resolver el problema de seguimiento de trayectorias, considerando la cinemática y la dinámica de un robot móvil tipo

(2,0), con la posibilidad de expandir el método a los otros tipos de robots. En [7] se presenta una estrategia de control que conmuta entre dos leyes de control diseñadas con base a criterios de estabilidad de sistemas conmutados, presentando los lineamientos a seguir en el diseño de las leyes de control cinemático. Los resultados se muestran utilizando un robot móvil de tipo (2,0). En [8] se propone un control adaptable basado en los modelos cinemático y dinámico de un robot tipo (2,0), validándolo mediante simulaciones y experimentos. En [9] se hace un análisis del método de linealización exacta aplicado a robots móviles propulsados por ruedas. En [10] se presenta una estrategia de control conmutado, basado en leyes de control linealizantes.

Varios autores han propuesto también algunos esquemas de control robusto, en [11] se propone una función de navegación tipo Lyapunov para generar un conjunto de trayectorias deseadas para la navegación de robot móviles. En [12] se propone una ley de control por modos deslizantes basada en el modelo dinámico de un robot unicycle para lograr que este converja a una trayectoria de referencia con errores acotados de posición y velocidad. En [13] se presenta otro control por modos deslizantes que de manera experimental muestra robustez ante perturbaciones y errores de medición. En [14] se propone una nueva ley de control por modos deslizantes basada en el modelo dinámico para resolver el problema de seguimiento de trayectorias, el robot móvil converge asintóticamente a la trayectoria de referencia. En [15] el problema de seguimiento de trayectoria para el modelo dinámico de un robot móvil (2,0), se resuelve usando un control por modos deslizantes, el control utiliza dos superficies de deslizamiento no lineales para

asegurar la convergencia asintótica de los errores de seguimiento.

En la literatura se encuentran escasos trabajos donde se presentan controladores en tiempo discreto utilizando el modelo discreto aproximado del robot móvil (2,0), tal como en [16], donde se resuelve el problema de estabilización de un robot móvil ante la presencia de perturbaciones acotadas en sus restricciones no holonómicas. De igual forma partiendo de los resultados obtenidos en [16], en [17] se propone una técnica de control por modos deslizantes en tiempo discreto para seguimiento de trayectorias con los errores de seguimiento acotados asintóticamente, la cual es probada experimentalmente. En [18] se presenta la obtención del modelo discreto exacto de un robot móvil (2,0) libre de retardos.

Dadas las aplicaciones típicas de un robot móvil por lo general es necesario que no existan conexiones alámbricas entre el robot móvil y su sistema de control, esto es, que sean controlados de forma remota inalámbricamente. Esta condición genera la necesidad de una red de comunicación entre el sistema de control, los sensores y los actuadores del vehículo. La inclusión de una red de comunicaciones, como se observa en la Figura 1, induce la presencia de retardos de propagación en el lazo de control debido a que las señales experimentan un retardo de tiempo en la etapa de actuación y de igual forma las señales de los diferentes sensores llegan con retraso al sistema donde se realiza el cálculo de las leyes de control. Estos retardos pueden no ser despreciables y podrían deteriorar el desempeño del sistema y causar en algunos casos inestabilidad.

Los tiempos muertos indicados de la forma des

crita, generalmente no pueden ser compensados fácilmente aun en el caso de contar con altas velocidades de procesamiento en el cálculo de las leyes de control.

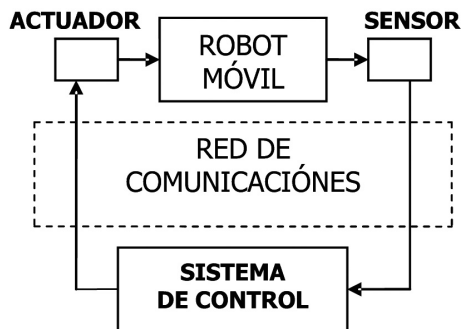


Figura. 1. Robot móvil controlador remotamente

A pesar de que los sistemas de control operados a distancia son un ejemplo de sistemas con tiempos muertos, cuyo efecto podría no ser ignorado, no se ha explorado ampliamente el problema de seguimiento de trayectorias utilizando el modelo cinemático discreto exacto de estos sistemas y menos aun, utilizando el modelo discreto exacto incluyendo los efectos de los retardos de propagación de las señales de control, como es el caso de los robots móviles controlados remotamente.

La utilización de modelos en tiempo discreto ha sido motivada fundamentalmente por la necesidad de abordar el problema de retardos de tiempo en la propagación de las señales en un sistema controlado a distancia. Los modelos discretos permiten analizar de una manera más simple los efectos del retardo en la propagación de las señales y permiten obtener controles discretos diseñados para compensar dichos efectos.

En [19], [20], se considera el modelo discreto aproximado del robot móvil tipo (2,0) para ob-

tener controles en tiempo discreto, con el objeto de resolver problemas de regulación y de seguimiento de trayectorias.

El artículo se organiza de la siguiente forma: En la Sección 2 se presentan tanto los modelos continuos como los discretos del robot móvil de tipo (2, 0). En la Sección 3 se presenta la obtención del modelo discreto exacto con la inclusión de un retardo de transporte para el robot móvil tipo (2, 0). En la Sección 4 se presenta la validación del modelo discreto obtenido mediante diferentes simulaciones numéricas. Finalmente las conclusiones se presentan en la Sección 5.

## II. MODELOS DEL ROBOT MÓVIL (2,0)

En la literatura es común encontrar que en el desarrollo de controladores para sistemas no lineales, solo se considera el modelo en tiempo continuo, dado que no siempre es posible obtener un modelo discreto exacto de estos sistemas.

Los robots móviles del tipo (2,0), como el que se observa en la Figura 2, se construyen utilizando dos o mas ruedas fijas sobre el mismo eje, no utilizan ruedas orientables. Su movimiento se logra al aplicar una velocidad diferente en cada una de las ruedas. Su grado de movilidad es dos, uno es la velocidad lineal  $u_1$  y el otro es la velocidad angular  $u_2$ . Dado que este tipo de robot tiene un solo eje con ruedas convencionales, se considera un solo punto de referencia sobre el cuerpo del robot y por tanto  $u_2$ , la velocidad angular o de rotación es una entrada del sistema al igual que  $u_1$ , la velocidad lineal o de desplazamiento.

La posición y orientación del robot móvil se establecen mediante tres estados,  $(x_1, x_2, x_3)$  donde

$x_1$  y  $x_2$  son las coordenadas del centro de rotación del robot con respecto a los ejes del marco de referencia fijo  $x_1 - x_2$ , y el estado  $x_3$  es el ángulo que forma el eje de referencia del robot con respecto a  $x_1$ .

El modelo cinemático en tiempo continuo de un robot tipo (2, 0) resulta ser,

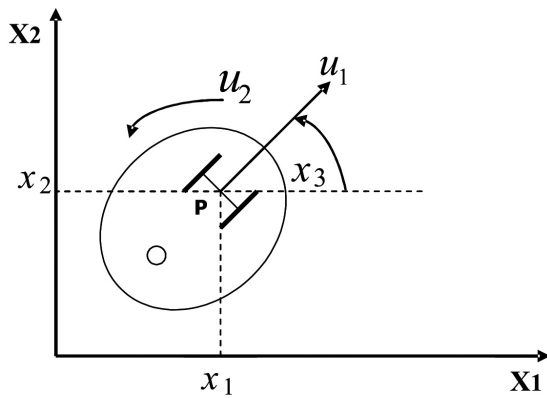


Figura 2. Robot móvil tipo (2,0)

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u_1(t) \cos x_3(t) \\x_2(t) &= u_1(t) \sin x_3(t) \\x_3(t) &= u_2(t)\end{aligned} \quad (1)$$

Un retardo de transporte se define como el intervalo de tiempo existente entre el inicio de un evento en una parte del sistema y la aparición del la acción consecuente o efecto resultante en otra parte del mismo sistema (generalmente la señal de entrada).

Los sistemas controlados a distancia están sometidos a retardos de transporte. Estos se presentan debido a que las señales deben viajar a través de un medio físico para comunicar el sistema de control con los sensores y los actuadores del sis-

tema remoto, tal como se ilustra en la Figura 1, la inclusión de una red de comunicaciones, altera el modelo continuo del sistema que se controla a distancia, debido a que las señales de control se generan en un instante de tiempo  $t_0$ , pero actúan sobre el sistema con un retardo de tiempo  $\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo que transcurre entre la generación de la señal en el controlador y la aplicación de esta señal en el sistema remoto. En el caso particular del robot móvil (2, 0) el modelo cinemático continuo dado en la ecuación (1) se modifica en el caso de la consideración de retardos de transporte, de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u_1(t - \tau) \cos x_3(t) \\x_2(t) &= u_1(t - \tau) \sin x_3(t) \\x_3(t) &= u_2(t - \tau)\end{aligned} \quad (2)$$

Partiendo de un modelo continuo es posible obtener fácilmente un modelo discreto aproximado, con el inconveniente de que este modelo es válido sólo para periodos de muestreo suficientemente pequeños. En [16, 17] se considera el modelo discreto aproximado del robot móvil tipo (2, 0) obteniéndose controles en tiempo discreto, con el objeto de resolver problemas de regulación y seguimiento de trayectorias.

La discretización aproximada, utilizando la primera aproximación de la expansión en series de Taylor o aproximación de Euler, del modelo cinemático del robot móvil (2, 0) libre de retardos toma la forma,

$$\begin{aligned}x_1(kT + T) &= x_1(kT) + Tu_1(kT) \cos x_3(kT) \\x_2(kT + T) &= x_2(kT) + Tu_1(kT) \sin x_3(kT) \\x_3(kT + T) &= x_3(kT) + Tu_2(kT)\end{aligned} \quad (3)$$

donde  $T$  es el periodo de muestreo.

En [19,20] se muestra mediante simulaciones, que el desempeño de un control discreto puede verse afectado por un retardo de transporte, de tal manera que los autores concluyen sobre la importancia de diseñar un controlador basándose en un modelo de la planta, en el que se incluya el efecto del retardo de transporte. A continuación se presenta el modelo discreto aproximado obtenido a partir de (2),

$$\begin{aligned} x_1(kT+T) &= x_1(kT) + (T-\tau)u_1(kT)\cos x_3(kT+\tau) \\ &\quad + \tau u_1(kT-T)\cos x_3(kT) \\ x_2(kT+T) &= x_2(kT) + Tu_1(kT)\sin x_3(kT) \\ &\quad + \tau u_1(kT-T)\sin x_3(kT) \\ x_3(kT+T) &= x_3(kT) + Tu_2(kT) \end{aligned} \quad (4)$$

Al igual que en el caso del modelo discreto aproximado (3), dado que se considera una aproximación de orden cero, este modelo solo es válido si el periodo de muestreo es suficientemente pequeño.

El modelo de un robot móvil de tipo (2,0) es un caso particular de un sistema no lineal, del cual es posible obtener un modelo discreto exacto [18].

Una de las principales ventajas de utilizar el modelo discreto exacto es que el desempeño de su esquema de control es independiente del periodo de muestreo utilizado. Teniendo en cuenta que la señal de entrada al sistema  $u(t)$  se puede considerar constante durante el intervalo  $tk$ , se obtiene el modelo discreto exacto por integración directa del modelo continuo (1).

$$\begin{aligned} x_1(kT+T) &= x_1(kT) \\ &\quad + 2\psi u_1(kT)\cos\left(x_3(kT) + \frac{T}{2}u_2(kT)\right) \\ x_2(kT+T) &= x_2(kT) \\ &\quad + 2\psi u_1(kT)\sin\left(x_3(kT) + \frac{T}{2}u_2(kT)\right) \\ x_3(kT+T) &= x_3(kT) + Tu_2(kT) \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$\psi(u_2(kT)) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{T}{2}u_2\right)}{u_2}, & \text{si } u_2 \neq 0 \\ \frac{T}{2}, & \text{si } u_2 = 0 \end{cases}$$

### III. OBTENCIÓN DEL MODELO DISCRETO EXACTO CON RETARDO DE TRANSPORTE

En esta sección se presenta la obtención de un modelo discreto exacto donde se incluye el retardo de transporte para un robot móvil de tipo (2, 0). Para obtenerlo se resuelve primero la ecuación diferencial para  $x_3(t)$  de (2), en el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ , esto es,

$$x_3(t) = x_3(t_0) + \int_{t_0}^t u_2(s-\tau)ds \quad (6)$$

Ahora, dado que la señal de control es considerada constante entre instantes de muestreo y además se ve afectada por un retardo  $\tau$ , esta se comporta como se ilustra en la Figura 3.

De lo anterior se tiene que la integral en (6) puede escribirse seccionalmente como,



$$x_3(t) = x_3(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} u_2(kT-T)ds + \int_{t_0+\tau}^t u_2(kT)ds \quad (7)$$

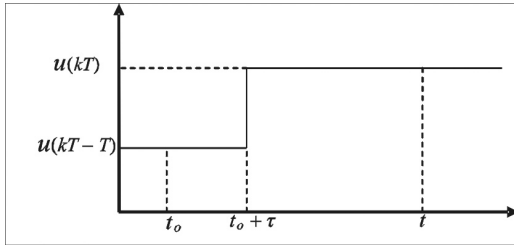


Figura 3. Señal Control  $u(t-\tau)$

de donde se obtiene,

$$x_3(t) = x_3(t_0) + \tau u_2(kT-T) + (t-t_0-\tau)u_2(kT)$$

Considerando  $t_n = kT$  y evaluando al final del intervalo  $[(kT), (kT+T)]$  se obtiene,

$$x_3(kT+T) = x_3(kT) + \tau u_2(kT-T) + (T-\tau)u_2(kT)$$

Obsérvese que en el intervalo de integración  $t_0 \leq t < t_0 + \tau$ ,  $x_3(t)$  toma simplemente la forma,

$$x_3(t) = x_3(t_0) + \int_{t_0}^t u_2(kT-T)ds$$

$$x_3(t) = x_3(t_0) + (t-t_0)u_2(kT-T)$$

y en el intervalo  $t_0 + \tau \leq t < t_0 + T$ ,  $x_3(t)$  está dado por,

$$x_3(t) = x_3(t_0) + \tau u_2(kT-T) + (t-t_0-\tau)u_2(kT)$$

Sustituyendo  $x_3(t)$  en las ecuaciones diferenciales para  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  del modelo continuo (2), es posible obtener el modelo exacto del sistema con retardo de transporte.

Al igual que la señal de control  $u_2$ , la señal  $u_1$  se ve afectada por un retardo  $\tau$ , por lo tanto el

cálculo del modelo discreto exacto con retardo del sistema, se realiza teniendo en cuenta las variaciones en las señales de control a causa del retardo  $\tau$ .

Considerando la ecuación para  $x_1(t)$  de (1), se obtiene,

$$x_1(t) = x_1(t_0) + u_1(kT-T) \int_{t_0}^{t_0+\tau} \cos(x_3(s))ds + u_1(kT) \int_{t_0+\tau}^t \cos(x_3(s))ds$$

Por lo tanto, sustituyendo la solución para  $x_3(t)$  en el intervalo de tiempo adecuado es posible escribir,

$$\begin{aligned} x_1(t) = & x_1(t_0) + u_1(kT-T) \int_{t_0}^{t_0+\tau} \cos(x_3(t_0) + (s-t_0)u_2(kT-T))ds \\ & + u_1(kT) \int_{t_0+\tau}^t \cos(x_3(t_0) + \tau u_2(kT-T) + (s-t_0-\tau)u_2(kT))ds \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} x_1(t) = & x_1(t_0) + \frac{u_1(kT-T)}{u_2(kT-T)} \left[ \sin(x_3(t_0) + \tau u_2(kT-T)) - \sin(x_3(t_0)) \right] \\ & + \frac{u_1(kT)}{u_2(kT)} \left[ \sin(x_3(t_0) + \tau u_2(kT-T) + (t-t_0-\tau)u_2(kT)) \right. \\ & \left. - \sin(x_3(t_0) + \tau u_2(kT-T)) \right] \end{aligned}$$

Considerando de nuevo  $t_n = kT$  y evaluando para la condición  $[(kT), (kT+T)]$  se obtiene,



$$\begin{aligned}
 x_1(kT+T) &= x_1(kT) \\
 &+ \frac{u_1(kT-T)}{u_2(kT-T)} \left[ \sin(x_3(kT) + \tau u_2(kT-T)) \right. \\
 &\quad \left. - \sin(x_3(kT)) \right] \\
 &+ \frac{u_1(kT)}{u_2(kT)} \\
 &\left[ \sin(x_3(kT) + \tau u_2(kT-T) + (T-\tau)u_2(kT)) \right. \\
 &\quad \left. - \sin(x_3(kT) + \tau u_2(kT-T)) \right] \quad (8)
 \end{aligned}$$

haciendo uso de la siguiente identidad trigonométrica

$$\sin(a+2b) - \sin(a) = 2\cos(a+b)\sin(b)$$

(8) puede reescribirse como,

$$\begin{aligned}
 x_1(kT+T) &= x_1(kT) \\
 &+ 2u_1\psi_1(kT-T) \\
 &\cos\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}u_2(kT-T)\right) \\
 &+ 2\psi_2u_1(kT) \\
 &\cos\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}u_2(kT-T) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T-\tau}{2}u_2(kT)\right) \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}u_2(kT-T)\right)}{u_2(kT-T)}, & \text{si } u_2(kT-T) \neq 0 \\ \frac{\tau}{2}, & \text{si } u_2(kT-T) = 0 \end{cases} \\
 \psi_1 &= \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{T-\tau}{2}u_2(kT)\right)}{u_2(kT)}, & \text{si } u_2(kT) \neq 0 \\ \frac{T-\tau}{2}, & \text{si } u_2(kT) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para  $x_2(t)$ , el modelo discreto exacto con retardo de transporte de un robot móvil tipo (2, 0) esta dado por,

$$\begin{aligned}
 x_1(kT+T) &= x_1(kT) \\
 &+ 2\psi_1u_1(kT-T) \\
 &\cos\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}u_2(kT-T)\right) \\
 &+ 2\psi_2u_1(kT) \\
 &\cos\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}u_2(kT-T) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T-\tau}{2}u_2(kT)\right) \\
 x_2(kT+T) &= x_2(kT) \\
 &+ 2\psi_1u_1(kT-T) \\
 &\sin\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}u_2(kT-T)\right) \\
 &+ 2\psi_2u_1(kT) \\
 &\sin\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}u_2(kT-T) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T-\tau}{2}u_2(kT)\right) \quad (10) \\
 x_3(kT+T) &= x_3(kT) + \tau u_2(kT-T) \\
 &+ (T-\tau)u_2(kT)
 \end{aligned}$$

con  $\psi_1(u_2(kT-T))$  y  $\psi_2(u_2(kT))$  como están definidas en (9).

Este sistema puede ser reescrito como un sistema aumentado, considerando las entradas de control retrasadas,  $u_1(kT-T)$  y  $u_2(kT-T)$ , como una nueva variable de estado, en la forma,

$$\begin{aligned}
x_1(kT+T) &= x_1(kT) \\
&+ 2\psi_1\zeta_1(kT) \\
&\cos\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}\zeta_2(kT)\right) \\
&+ 2\psi_2u_1(kT) \\
&\cos\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}\zeta_2(kT) \right. \\
&\quad \left. + \frac{T-\tau}{2}u_2(kT)\right) \\
x_2(kT+T) &= x_2(kT) \\
&+ 2\psi_1\zeta_1(kT) \\
&\sin\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}\zeta_2(kT)\right) \\
&+ 2\psi_2u_1(kT) \\
&\sin\left(x_3(kT) + \frac{\tau}{2}\zeta_2(kT) \right. \\
&\quad \left. + \frac{T-\tau}{2}u_2(kT)\right) \\
x_3(kT+T) &= x_3(kT) + \tau\zeta_2(kT) \\
&+ (T-\tau)u_2(kT) \\
\zeta_1(kT+T) &= u_1(kT) \\
\zeta_2(kT+T) &= u_2(kT)
\end{aligned}$$

#### IV. VALIDACIÓN DEL MODELO DISCRETO EXACTO CON RETARDO DE TRANSPORTE

Con el fin de validar el modelo obtenido se realizaron simulaciones en lazo abierto considerando diferentes tiempos de muestreo, comparando las respuestas obtenidas para el modelo continuo

con retardo; el modelo discreto aproximado con retardo y el modelo discreto exacto con retardo.

En la Figura 4 se observa la variable  $x_1(kT)$  y  $x_2(kT)$ , de los tres modelos cinemáticos que incluyen el retardo en transporte, el continuo, el discreto aproximado y el discreto exacto, se presenta también el error entre el modelo discreto aproximado con retardo y el modelo exacto con retardo con respecto a la señal continua con retardo, el tiempo de muestreo es de  $T=0.05$ . En la Figura 5 se observa el resultado obtenido para un tiempo de muestreo de  $T=0.5$ . En la Figura 6 se observan los resultados de simulación para las mismas variables con un periodo de muestreo  $T=5$ . En ambos casos el tiempo de retardo es  $T/2$ .

En el caso de la variable  $x_3$  el modelo obtenido es el mismo tanto en la discretización exacta con retardo de transporte como en la discretización aproximada con retardo de transporte.

En los resultados de simulación se observa claramente que el modelo exacto con retardo no cambia su desempeño al variar el tiempo de muestreo a diferencia del modelo discreto aproximado con retardo.

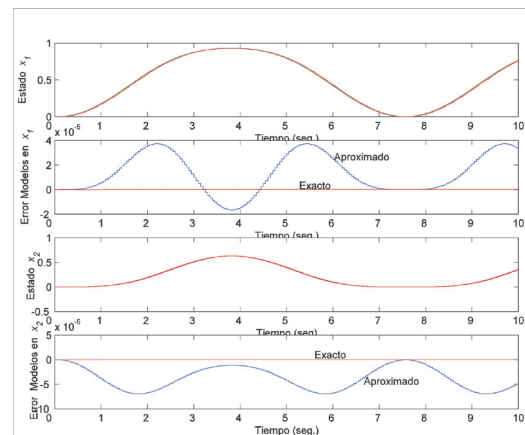


Figura 4. Simulación utilizando un  $T=0.05$

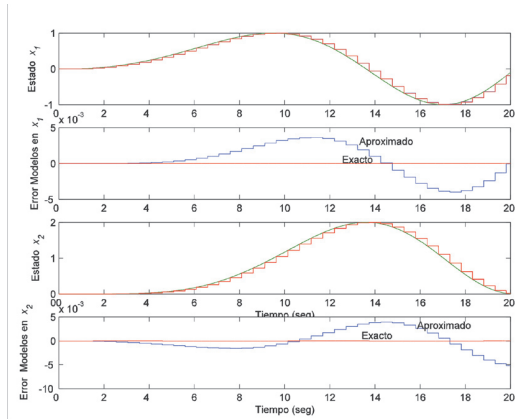


Figura 5. Simulación utilizando un  $T=0.5$

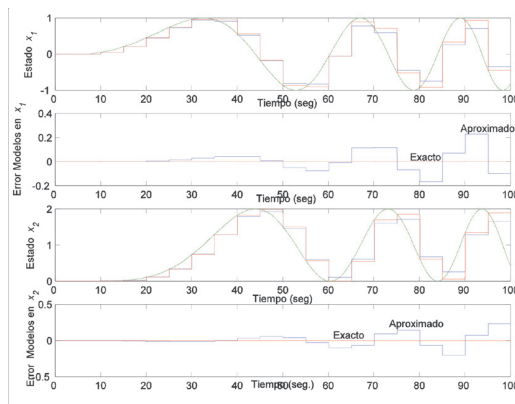


Figura 6. Simulación utilizando un  $T=5$

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta el modelo discreto exacto de un robot móvil tipo (2,0) el cual presenta retardos de transporte.

Es posible verificar que el comportamiento del modelo discreto exacto no se deteriora al aumentar significativamente el periodo de muestreo lo que puede permitir su utilización en un esquema de control digital.

Dado que el modelo exacto es una función de un tiempo  $kT$  es posible el diseño de leyes de control causales para la solución de problemas clásicos de control.

## VI. REFERENCIAS

- [1] G. Campion, G. Bastin, and B. D. Andrea-Novel. Structural properties and classification of kinematic and dynamics models of wheeled mobile robots. IEEE Transaction on Robotics and Automation. Vol 12, No. 1, 1996, pp. 47-61.
- [2] C. Canudas-De-Wit and O. J. Sordalen. Exponential stabilization of mobile robots with non-holonomic constraint. En 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, December 1991, pp. 692-697.
- [3] B. D. Andrea-Novel, G. Bastin, and G. Campion. Dynamic state feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots. En Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, 1992, pp. 2527-2532.
- [4] W. Oelen, H. Berghuis, H. Nijmeijer, C. Canudas de Wit. Hybrid stabilizing control on a real mobile robot. IEEE Robotics & Automation Magazine, June 1995, pp.
- [5] B. Thuilot, B. D. Andrea-Novel, and A. Miccaelli. Modeling and feedback control of mobile robots equipped with several steering wheels. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 12, No. , 1996, pp. 375-390.
- [6] Y. Zhao and S. L. BeMent. Kinematics, dynamics and control of wheeled mobile robots. En Proce-

dings of the IEEE International Conference on Robotic and Automation. Nice, France, 1992, pp.91-96.

- [7] M. Zefran and J. W. Burdick. Desing of switching controllers for systems with changing dynamics. En 37th IEEE Conference of Desicion and Control. Tampa, Florida, USA, December 1998, pp. 2113-2118.
- [8] T. Fukao, H. Nakagawa, and N. Adachi. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. IEEE Transactions on Robotic and Automation. Vol 16, No 5, October 2000, pp. 605-615.
- [9] G. Oriolo, A. De Luca, and M. Venditteli. WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation and experimental validation. IEEE Transaction on Control Systems Technology. Vol. 10, No 6, 2002, pp.835-852.
- [10] E. Aranda-Bricaire, T. Salgado-Jiménez, and M. Velasco-Villa. Control no lineal discontinuo de un robot móvil. Computación y Sistemas. Número especial, Diciembre 2002, pp.42-49.
- [11] J. Guldner and V. Utkin. Sliding mode control for gradient tracking and robot navigation using artificial potential fields. IEEE Transaction Robotic and Automation. Vol. I, No. 2, Apr. 1995, pp.247-254.
- [12] H.S. Shim, J.-H. Kim and K. Koh. Variable structure control of nonholonomic wheeled mobile robots. En Proc. IEEE International Conference on Robotic and Automation. May 1995, pp.1694-1699.
- [13] J. M. Yang, I. H. Choi, and J. H. Kim. Sliding mode control of a nonholonomic wheeled mobile robot for trajectory tracking. En Proceeding of 1998 IEEE International Conference on Robotic and Automation. Leuven, Belgium, 1998, pp. 2983-2988.
- [14] J. Yang and J. Kim. Sliding mode motion control of nonholonomic mobile robots. IEEE Control System. Vol 19, No 2, 1999, pp.15.23.
- [15] M. Corradini and G. Orlando, Robust tracking control of mobile robots in the presence of uncertainties in the dynamical model. Journal Robot System. Vol 18, No 6, 2001, pp.317.323.
- [16] M. Corradini, T. Leo and G. Orlando, "Robust stabilization of a mobile robot violating the non-holonomic constraint via quasi-sliding modes", in Proceedings of American Control Conference, San Diego, California, June, 1999, pp 3935–3939.
- [17] M. Corradini, T. Leo and G. Orlando, Experimental testing of a discrete-time sliding mode controller for trajectory tracking of a wheeled mobile robot in the presence of skidding effects, Journal of Robotic Systems, vol.19, no.4, 2002, pp 177-188.
- [18] R. Orosco-Guerrero, M. Velasco-Villa, and E. Aranda-Bricaire. Stable discrete-time path-tracking control for a WMR. En Memorias del Congreso Anual de la Asociación de Control Automático 2003, Octubre 2003
- [19] M. Wargui, M. Tadjine, and A. Rachid. Stability of real time control of an autonomous mobile robot . In IEEE 5th. International Workshop on Robot and Human Communication, Tasukuba, Japan, November 1996, pp 311-316,.
- [20] M. Wargui, A. Tayebi, M. Tadjine, and A. Rachid. On the stability of an autonomous mobile robot subject to network induce delay. In IEEE 5th. International Conference on Control Applications, Hartford, CT, October 1997, pp. 28-30,.