



Ciencia e Ingeniería Neogranadina

ISSN: 0124-8170

revistaing@unimilitar.edu.co

Universidad Militar Nueva Granada

Colombia

Vargas, W. L.; Pineda, Lyda M.; Murcia, Juan Carlos  
Impacto inelástico de una partícula sobre una superficie  
Ciencia e Ingeniería Neogranadina, vol. 16, núm. 1, agosto, 2006, pp. 80-91  
Universidad Militar Nueva Granada  
Bogotá, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=91116108>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica  
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## **IMPACTO INELÁSTICO DE UNA PARTÍCULA SOBRE UNA SUPERFICIE**

---

### **INELASTIC IMPACT OF A PARTICLE ON A SURFACE**

---

*Fecha de Recepción: 20 de junio de 2006*

*Fecha de Aprobación: 31 de julio de 2006*

**W. L. Vargas<sup>1</sup>**

**Lyda M. Pineda<sup>2</sup>**

**Juan Carlos Murcia<sup>3</sup>**

---

### **RESUMEN**

*En este estudio se presentan fundamentos básicos sobre la evaluación experimental del coeficiente de restitución aplicando tres métodos de estimación diferentes. Experimentalmente se ha estudiado la colisión normal de una esfera sin rotación sobre una pared plana lisa, explorando un rango significativo de materiales, velocidades de impacto y tamaños de partícula. Los resultados muestran la consistencia de las tres metodologías, las cuales rinden información complementaria. Se ha aplicado un modelo simplificado que reproduce de manera satisfactoria las observaciones experimentales.*

**Palabras clave:** *Coefficiente de restitución, Disipación, Contacto inelástico.*

### **ABSTRACT**

*In this work, we present basic theoretical foundations on the experimental evaluation of the restitution coefficient, applying three different methods. We have study experimentally the normal collision of a sphere, without rotation on a perfectly flat surface; exploring a range of materials, impact velocities and particle sizes. The results reveal the consistency of the three methods, which yield complementary information. A simplified numerical method that reproduces the experimental observations has also been implemented.*

**Key words:** *Coefficient of restitution, Damping, inelastic contact.*

---

<sup>1</sup> Profesor Asociado, Facultad de Ingeniería (UMNG) Ing. Químico MSc., Ph.D Autor corresponsal: wvargas@etb.net.co, spc@umng.edu.co

<sup>2</sup> Ing. Civil, Joven Investigadora programa UMNG

<sup>3</sup> Ing. Civil, Estudiante Maestría Universidad de los Andes

## I. INTRODUCCIÓN

Los materiales granulares representan un campo muy rico y amplio para la investigación. Estos sistemas discretos son importantes tanto en el estudio de fenómenos naturales (e.g., Avalanchas) como en procesos industriales (e.g., farmacéuticos, materiales de construcción, manipulación de granos, productos químicos y petroquímicos). El material granular representa un tipo de materia que no puede describirse muy bien en términos de los métodos convencionales, i.e., sólidos, líquidos o gases [1]. Aún cuando cada partícula granular es un sólido independiente, un conglomerado de estas partículas muestra comportamientos no característicos de un sólido sometido a fuerzas externas.

Las analogías son muy difíciles por el hecho de que la dinámica de los medios granulares es disipativa, lo cual genera comportamientos inusuales [2]. Dado que un sistema granular no conserva energía, los métodos tradicionales de la mecánica estadística no son enteramente aplicables. Existen dos regímenes de interés en medios granulares, el régimen cuasi-estático, o “sólido” y el régimen de flujo rápido, o de comportamiento tipo “fluido”. El régimen compacto, cuasi-sólido se caracteriza por los contactos permanentes entre partículas y por estructuras internas complejas de transmisión de las fuerzas denominadas cadenas de esfuerzo.[3]. El régimen de flujo rápido se caracteriza por las colisiones binarias y la disipación de energía debido a la inelasticidad de dichas colisiones, el sistema semeja un “gas denso”. De hecho la teoría cinética de los gases ha sido modificada para incluir la naturaleza disipativa de las colisiones con éxito relativo.[4,5]. Para poder observar un estado estacionario en un sistema

granular disipativo, se debe suministrar energía constantemente, a partir de una fuente externa. Por lo tanto, los modelos experimentales prototipo consisten de material granular confinado en un contenedor donde se suministra energía de forma continua a través de las paredes.

El objetivo de la presente contribución es avanzar en la comprensión de los mecanismos y características de la disipación de energía en medios granulares y su aplicación con propósitos útiles, particularmente en los casos en que las partículas interactúan con un sustrato. Específicamente, nuestro trabajo se enfoca a la validación de modelos de contacto (fuerza-desplazamiento) aplicados en simulaciones de flujo granular usando el método de elementos discretos DEM.[6], al igual que la aplicación potencial de partículas como sistemas pasivos de absorción de vibraciones [7].

El artículo está organizado de la siguiente manera. La Sección II describe brevemente los conceptos y mecanismos básicos de disipación y los diversos métodos experimentales aplicados en la determinación del coeficiente de restitución. La Sección III explica el modelo elemental de disipación implementado. Los resultados y su discusión se presentan en la Sección IV. Finalmente la Sección V presenta las conclusiones y perspectivas del presente trabajo.

## II. COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

Durante una colisión ideal, i.e., una colisión elástica, toda la energía cinética de la partícula se transforma en deformación elástica durante el proceso de contacto, para luego ser reconvertida en energía cinética cuando la partícula rebota.

En la práctica, siempre se pierde energía durante el proceso de contacto y rebote. Esta pérdida de energía, es efectivamente un proceso disipativo [8]. Tres mecanismos contribuyen fundamentalmente a dicha disipación energética:

1. Energía perdida debido a las vibraciones de la superficie (ondas superficiales y volumétricas y modos vibracionales) así como la vibración almacenada en la partícula luego de la colisión.
2. Energía perdida debido a la deformación plástica de la superficie blanco y la partícula que colisiona.
3. Energía disipada debida a las características visco-elásticas de la partícula y la superficie.

Para una colisión dada e independientemente del tipo de materiales involucrados, el coeficiente de restitución  $e$  se define como la relación entre la velocidad de la partícula después y antes de la colisión, i.e.,  $e=V'/V$ . Los valores del coeficiente de restitución se extraen a partir de los tiempos de vuelo de la partícula, entre dos rebotes sucesivos.

En la literatura reciente el efecto de la disipación se ha modelado considerando un efecto de disipación viscosa que es lineal con la velocidad de deformación [9]. Esta aproximación indica que

$$e(v_{\text{imp}}) = 1 - \frac{C}{r} v_{\text{imp}}^{1/5} \quad (1)$$

donde,  $C$  es una constante que depende de las propiedades del material. Una aproximación diferente que atribuye la disipación a la deformación plástica, predice que

$$e(v_{\text{imp}}) \cong 1.18(v_{\text{imp}}/v_{\text{ys}})^{-1/4} \quad (2)$$

para  $V \geq V_{\text{ys}}$ , la velocidad a la cual se excede el punto de fluencia (Y.S., Yield Stress, por sus siglas en inglés). Experimentos en colisiones esfera-esfera y esfera-pared indican en general que  $e$  decrece con la velocidad satisfaciendo cualitativamente las expectativas teóricas. Sin embargo, no existe aún consenso sobre cual modelo de dependencia de  $e$  con el tamaño de partícula ( $r$ ) o la velocidad de impacto ( $V_{\text{imp}}$ ) debe usarse [5].

Si las partículas son rugosas, i.e., la fricción es preponderante, entonces tanto el componente normal como tangencial del coeficiente de restitución deben considerarse cuando se describen colisiones inelásticas entre partículas. McNamara y Luding [10] han mostrado que no existe equipartición energética entre las componentes lineal y rotacional para partículas rugosas que colisionan.

Los momentos angulares —tanto inducidos por la colisión con la superficie y alrededor de la normal inducidos por la colisión— en general, no pueden ser resueltos experimentalmente. Por tanto, aún cuando es posible observar la interacción y acoplamiento de la transferencia de momento lineal y angular durante una colisión, no es posible resolver las contribuciones individualmente. Esto implica que los valores experimentales del coeficiente de restitución son una cantidad efectiva.

A continuación se describen tres métodos diferentes pero complementarios para la determinación del coeficiente de restitución. Si se asume que las variaciones del coeficiente de restitución son relativamente menores con la velocidad de impacto dos métodos simples pueden ser utilizados.

### A. Método del Tiempo Total de Rebote

Este método es muy simple y puede utilizarse como una forma de obtener valores cualitativos del coeficiente de restitución para un material dado. El método consiste en soltar una partícula desde una altura conocida  $h_o$ , --medida por ejemplo mediante un metro a una regla-- y medir el tiempo total  $t_{tot}$ , usando un cronómetro, hasta que la partícula deja de rebotar sobre la superficie blanco. Las mayores incertidumbres en esta medición se dan durante la liberación de la partícula, proceso durante el cual se pueden generar rotaciones indeseadas, las características de la superficie de rebote son también importantes. Dicha superficie requiere ser plana, lisa y relativamente masiva, para evitar demasiada transferencia de energía lo cual genera valores de  $e$  relativamente bajos y lejanos a lo esperado para un material dado. La Figura 1 ilustra el montaje experimental requerido para la determinación de  $e$  mediante el método descrito arriba.

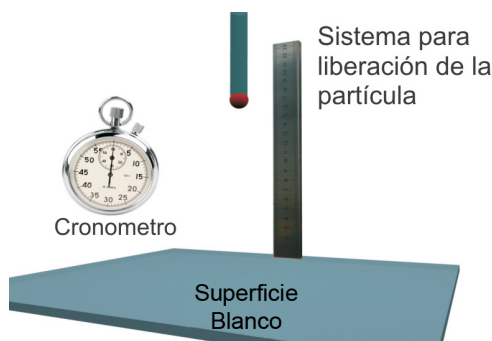


Figura 1. Esquema del dispositivo experimental utilizado para determinar el coeficiente de restitución aplicando el método del tiempo total de rebote

Asumiendo que la resistencia del aire es despreciable y aplicando principios clásicos de conservación de energía mecánica se puede determinar que [11]:

$$t_{tot} = (2h_o / g)^{1/2} \left[ 2 \left\{ \frac{1}{(1-e)} \right\} - 1 \right] \quad (3)$$

La Ecuación 3, muestra que el tiempo total es proporcional a la raíz cuadrada de la altura inicial  $h_o$ . Si se asume que este comportamiento es válido para la situación bajo estudio, entonces una gráfica de  $t_{tot}$  vs.  $(h_o)^{1/2}$  deberá proporcionar una línea recta cuya pendiente estará dada por:

$$m = \left( \frac{2}{g} \right)^{1/2} \frac{1+e}{1-e} \quad (4)$$

Para facilidad de cálculo se puede mostrar que

$$e = \frac{m(2/g)^{1/2} - 1}{m(2/g)^{1/2} + 1} \quad (5)$$

### B. Método del Sonido

Este método consiste en soltar la partícula desde una altura inicial, permitir que rebote sobre la superficie blanco varias veces y grabar el sonido que generan los impactos sobre la superficie. El análisis de las grabaciones permite calcular los tiempos de vuelo de la partícula, a partir de los cuales se puede determinar el coeficiente de restitución, como valor constante o como función de la velocidad de impacto. La Figura 2 ilustra el dispositivo experimental. La señal típica obtenida de un experimento de rebote sobre una superficie se muestra en la Figura 3.

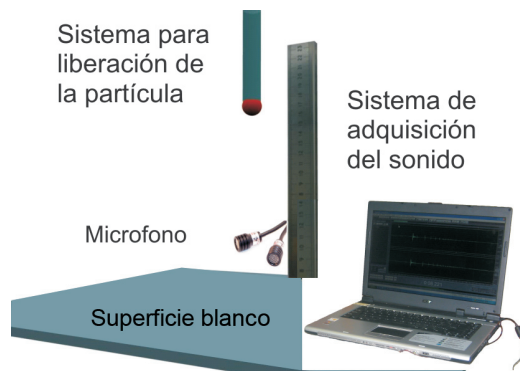


Figura 2. Esquema del dispositivo experimental utilizado para determinar el coeficiente de restitución por el sonido de los rebotes

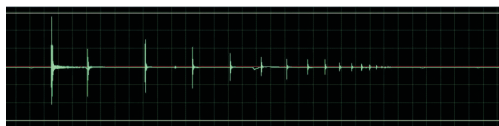


Figura 3. El sonido de una esfera rebotando sobre una superficie

Para relacionar el coeficiente de restitución  $e$  con el tiempo entre rebotes, si se asume que la resistencia del aire es despreciable y que  $e$  es independiente de la velocidad de impacto, entonces

$$V_n = V_0 e^n \quad (6)$$

donde,  $V_0$  es la velocidad justo antes del primer impacto. El tiempo de vuelo  $t_n$  entre la colisión  $n$  y la  $n+1$  es proporcional a  $V_n$ , esto es

$$t_n = \frac{2V_n}{g} \quad (7)$$

donde,  $g$  es la aceleración de la gravedad. Por lo tanto

$$t_n = t_0 e^n \quad (8)$$

donde se ha definido  $t_0 = 2V_0/g$ . Tomando logaritmo a los dos lados se tiene que

$$\log t_n = n \log e + \log t_0 \quad (9)$$

de tal forma que una gráfica de  $\log t_n$  vs.  $n$  proporciona una línea recta cuya pendiente es  $\log e$  e intercepto  $\log t_0$ . Así, siempre que el coeficiente de restitución sea independiente de la velocidad de impacto,  $e$  puede estimarse del ajuste lineal de los tiempos de vuelo de la partícula.

### III. MODELO ELEMENTAL DE UNA PARTÍCULA INELÁSTICA

El punto de partida para la mayoría de los modelos de colisión inelástica normal parten de la solución propuesta por Hertz para la solución del problema de contacto normal entre una esfera y una superficie[12]. Esta solución especifica el campo de esfuerzos en términos de la compresión de la partícula, su radio  $r$  y las propiedades mecánicas tanto de la esfera como de la pared. En problemas de colisiones entre partículas se asume que la solución de Hertz sigue siendo válida en el punto de contacto, bajo la restricción que la velocidad de impacto de la partícula sea mucho menor que la velocidad del sonido en cualquiera de los sólidos, i.e., el tiempo de contacto es menor que el tiempo de viaje del sonido a través del sólido. Para complementar el modelo elástico de Hertz es necesario entonces considerar diversos mecanismos de disipación de la energía que permitan determinar un coeficiente de restitución cercano a las observaciones experimentales.

Para el desarrollo del modelo se asume que una partícula se suelta desde una altura inicial  $h_0$  sin velocidad inicial. La partícula cae verticalmente sobre una superficie horizontal perfectamente lisa de un material regido, la partícula rebota un número dado de veces hasta que finalmente se detiene. Durante el proceso de caída libre, se asume que la partícula está sujeta solamente a la

fuerza de gravedad. Además, durante cada rebote se asume que la colisión es instantánea, i.e., el tiempo de contacto es cero e inelástico i.e., se disipa energía cinética. La velocidad de la partícula es menor luego de la colisión, y en consecuencia, la altura de los rebotes disminuye en el tiempo (ver Figura 4).

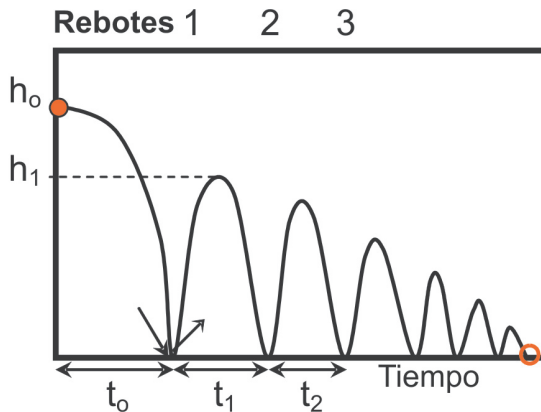


Figura 4. Representación esquemática del proceso de colisión de una partícula sobre una superficie plana. Adaptado de la Ref.[8]

Si se define  $y$  como la distancia entre la partícula y la superficie blanco en un marco de referencia tal que la superficie es el punto de origen. Entonces, la interpenetración de la partícula con la superficie corresponde a un desplazamiento positivo, mientras que la separación de la partícula desde la superficie corresponde a un desplazamiento negativo. Asumiendo que la disipación es despreciable, las fuerzas que actúan sobre la partícula corresponden al peso y a la fuerza de contacto elástico (interacción de Hertz) con la superficie cuando  $y > 0$ . Bajo estas suposiciones, el movimiento de la partícula está entonces gobernado por la ecuación

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k|y|^{3/2} \varphi(y) \quad (10)$$

donde

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

En la Ecuación 10,  $m$  es la masa de la partícula y  $g$  es la aceleración de la gravedad. La constante  $k$  es el coeficiente de la ley de Hertz para el contacto entre una esfera y un plano y esta dado por

$$k = \frac{4}{3} \sqrt{r} E^* \quad (12)$$

donde  $E^*$ , es el módulo de elasticidad efectivo, definido como

$$E^* = \left( \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} + \frac{1 - \nu_w^2}{E_w} \right) \quad (13)$$

En la expresión 13,  $E_s \nu_s$  y  $E_w \nu_w$  corresponden, respectivamente, al módulo de Young y relación de Poisson para la partícula esférica y la superficie.  $r$  es el radio de la partícula.

El modelo de la Ecuación 10, describe de manera satisfactoria los rebotes de la partícula así como las oscilaciones de la partícula sobre la superficie. Sin embargo, tal y como se menciona en la Sección II, durante una colisión siempre se pierde algo de energía. Para poder tener en cuenta este fenómeno disipativo, es necesario introducir alguna forma de fuerza disipativa en el modelo de la Ecuación 10., de tal forma que dicha Ecuación se exprese como

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k|y|^{3/2} \varphi(y) - F_{dis} \varphi(y) \quad (14)$$



donde  $(\Phi)y$ , se ha definido en la expresión 11. Asumiendo un mecanismo de disipación visco-elástico,  $F_{dis}$  esta dada por

$$F_{dis} = -\mu\dot{y}|y|^\gamma \quad (15)$$

donde,  $\gamma$  es una constante que caracteriza la naturaleza lineal i.e.,  $\gamma=0$  ó no-lineal i.e.,  $\gamma \neq 0$  de la fuerza visco-elástica y  $\mu$  es un coeficiente de disipación. La Figura 5, ilustra la respuesta típica del modelo aplicando la Ecuación 10 (panel 5(a)), i.e., respuesta elástica y la Ecuación 14 (panel 5(b)), i.e., respuesta inelástica.

Para la solución del sistema de ecuaciones generado a partir de la Ecuación 14 se utiliza un método de Runge-Kutta de cuarto orden con intervalo de tiempo constante. En el tiempo  $t=0$ , la partícula colisiona con la superficie a una velocidad de impacto  $V_{imp}$ . Las condiciones iniciales del problema son por lo tanto  $y(t=0)=0$  y  $\dot{y}(t=0)=V_{imp}$ . El tamaño del paso de integración es menor que el tiempo de contacto de una esfera con el plano. Un  $dt=0.1\mu s$  se utilizó en todos los casos. La integración numérica se detiene cuando la interpenetración  $y$  es negativa, i.e., al final de la interacción entre la partícula y el plano, lo que determina el tiempo total de la colisión. El valor de la velocidad al final de la colisión se utiliza entonces para determinar el coeficiente de restitución mediante  $e=V'/V_{imp}$ . Repitiendo este procedimiento para varios valores de, se tiene entonces acceso a la evolución del coeficiente de restitución con la velocidad de impacto, para unos parámetros dados de  $\mu$  y  $\gamma$ .

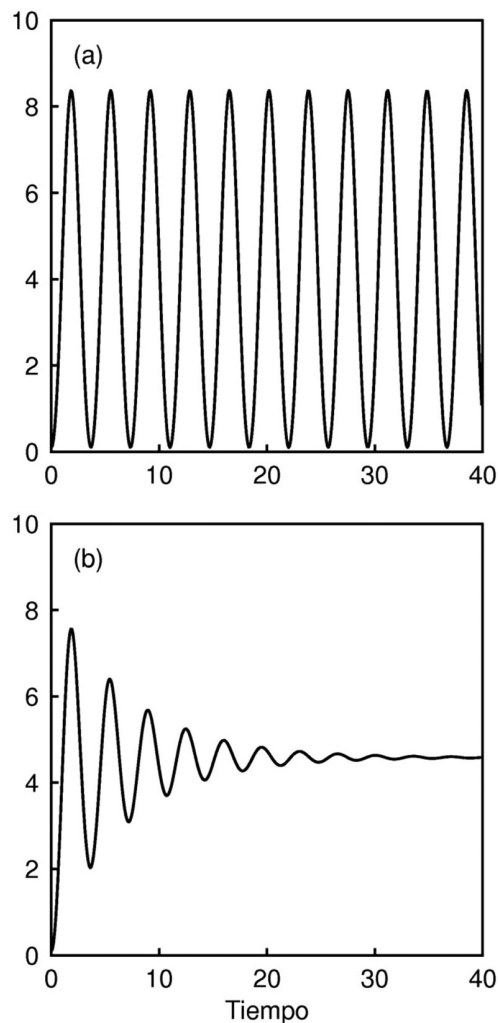


Figura 5. Respuesta del modelo simplificado de movimiento de una partícula rebotando sobre una superficie. (a) Modelo elástico (Ec. 10). (b) Modelo inelástico (Ec. 14).

#### IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este trabajo se estudia la colisión normal de una esfera sin rotación sobre una pared plana lisa, explorando un rango significativo de materiales, velocidades de impacto y tamaños de par-



tícula. Aquí se reportan datos de la colisión de esferas de diversos tamaños y materiales sobre una placa de acrílico de 30x30 cm con un espesor de 5mm, aplicando tres técnicas distintas para la determinación del coeficiente de restitución.

### A. Método del Tiempo Total de Rebote

Los resultados obtenidos por el método del tiempo total de rebote se ilustran en la Figura 6. Los valores efectivos del coeficiente de restitución obtenidos mediante este método se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados para el coeficiente de restitución efectivo aplicando la metodología del tiempo total de rebote

	m	$r^2$	$e$
Acetato 5mm	4.6491	0.975	0.8229
Vidrio 3.8 mm	3.6985	0.921	0.7823
Acero 3.2 mm	3.7578	0.9948	0.7852

Los resultados de la Tabla 1, muestran consistencia con valores experimentales obtenidos con métodos más sofisticados y que requieren equipos especiales para su determinación. Es importante resaltar, sin embargo, que dichos valores son de orden cualitativo y sólo deben utilizarse como valores estimados. La Figura 6 muestra el ajuste de los datos experimentales aplicando la expresión en la Ecuación 3.

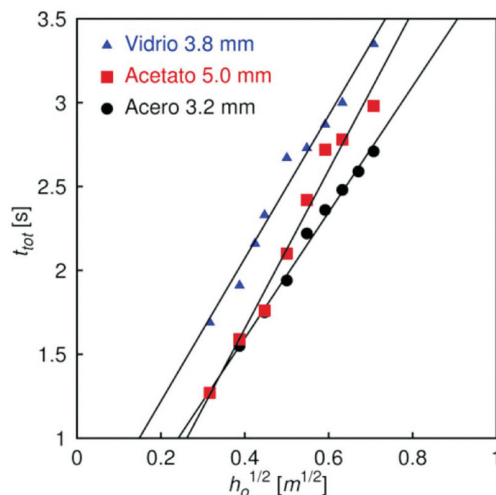


Figura 6. Tiempo total de los rebotes vs. la raíz cuadrada de la altura inicial. Las líneas corresponden al ajuste lineal aplicando la Ecuación 3. Notar que en el ajuste no se ha forzado la intersección con el punto cero, como lo indica el modelo

### B. Método del Tiempo de Vuelo ( $e$ independiente de $V_{imp}$ )

Si se asume que la resistencia del aire es despreciable y que  $e$  es independiente de la velocidad de impacto, de acuerdo con la expresión en la ecuación 9 la gráfica de  $\log t_n$  vs.  $n$  proporciona una línea recta cuya pendiente es  $\log e$  e intercepto  $\log t_0$ . Los resultados de este método se muestran en la Figura 7. Los intervalos de tiempo (tiempos de vuelo) se obtuvieron directamente de la señal de sonido grabada, utilizando un software especializado para la manipulación de señales sonoras.

Los valores efectivos del coeficiente de restitución obtenidos mediante este método se resumen en la Tabla 2. Los resulta-

dos en la Tabla 2 muestran que sobre un rango relativamente amplio de alturas, el coeficiente de restitución es, en este caso particular, independiente de la altura inicial  $h_0$  y por lo tanto de la velocidad de impacto inicial.

Tabla 2. Resultados para el coeficiente de restitución efectivo aplicando la metodología del tiempo de vuelo. Acetato 5mm sobre superficie de acrílico

$h_0$ [m]	$m = \log e$	$r^2$	$e$
0.10	-0.0968	0.992	0.800
0.35	-0.0966	0.994	0.801
0.40	-0.0894	0.996	0.814

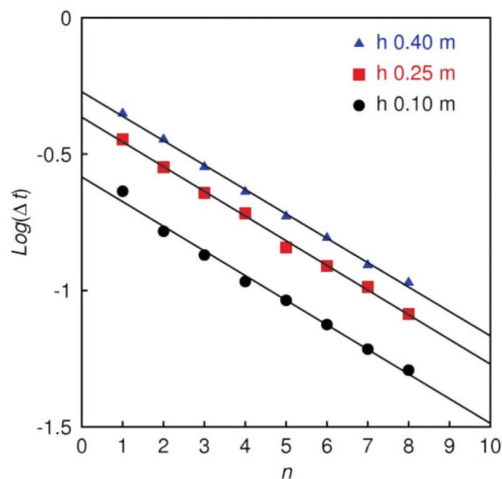


Figura 7. Tiempo de vuelo entre impactos  $y$  . Las líneas representan el ajuste utilizando la Ec. 9. Los datos experimentales representan el rebote de una esfera de acetato de 5mm sobre una superficie de acrílico para tres alturas iniciales diferentes. Notar que las pendientes son paralelas indicando que el coeficiente de restitución es prácticamente independiente de la altura inicial y por tanto de la velocidad inicial de impacto

### C. Método del Tiempo de Vuelo ( $e$ dependiente de $V_{imp}$ )

Los intervalos de tiempo (tiempos de vuelo) se obtuvieron directamente de la señal de sonido grabada, utilizando un software especializado para la manipulación de señales sonoras, como se ilustra en la Figura 8. Los resultados mostrados corresponden al promedio de tres experimentos independientes. Dada una traza de rebotes a intervalos de tiempo  $t_0$ , como se ilustra en la Figura 8, el coeficiente de restitución como función de la velocidad de impacto puede determinarse como  $e(V_{imp}) = -V_{n+1}/V_n = (t_{n+1} - t_n)/(t_n - t_{n-1})$ . En la Figura 9 se muestra la variación de  $e$  con la velocidad de impacto para una esfera de acetato de 5mm.

Los cuadrados sólidos representan los datos experimentales, resultado de 10 pruebas independientes, la línea continua representa el ajuste promedio de todos los datos. La observación más relevante es que la dependencia de  $e$  con la velocidad de impacto no es monótonica; existe un rango de velocidad para las cuales la colisión es más elástica. Estas observaciones están de acuerdo con observaciones experimentales similares donde se han aplicado otras técnicas [9]. Los resultados obtenidos en este estudio complementan dichos estudios y muestran que en efecto el coeficiente de restitución no se incrementa monótonamente a medida que  $V_{imp} \rightarrow 0$ . Resultados no mostrados indican que este comportamiento es semejante para la interacción entre diferentes pares de materiales esfera-superficie.

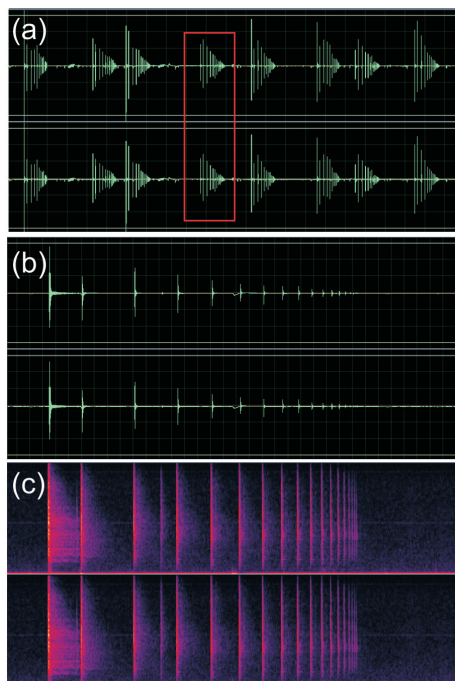


Figura 8. El sonido de una esfera rebotando sobre una superficie. (a) Trazas en el tiempo para 8 experimentos distintos. (b) Secuencia de 17 rebotes de una esfera de acetato de 5mm sobre una superficie de acrílico, el recuadro identifica la traza utilizada. (c) La misma secuencia de (b) identificando la localización en el tiempo de los picos principales

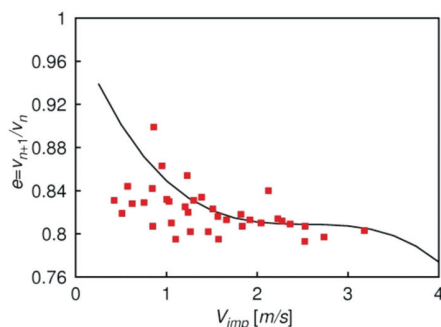


Figura 9. Coeficiente de restitución como función de la velocidad de impacto para una esfera de acetato de 5 mm, rebotando sobre una superficie de acrílico. Los cuadrados sólidos representan los datos de rebote de 10 experimentos independientes. La línea sólida indica un ajuste promedio sobre todos los datos y representa tan solo una guía para la vista

#### D. Comparación con el Modelo Computacional

La Figura 10 muestra la evolución del coeficiente de restitución como función de la velocidad de impacto. La línea continua en la Figura 10 ilustra la evolución de  $e$  obtenido mediante la integración numérica de la Ecuación 14, aplicando la metodología descrita en la Sección III. Todos los parámetros con excepción de  $\mu$  y  $\gamma$  -- los cuales han sido tomados como parámetros de ajuste--, fueron tomados de la literatura. Los datos predichos por el modelo muestran un decrecimiento del coeficiente de restitución con la velocidad de impacto, en concordancia con la tendencia observada en los datos experimentales. Para este rango de velocidades de impacto  $e \rightarrow 0$ , para valores de velocidad de impacto que tienden a cero. Los experimentos son descritos de manera más o menos adecuada por el modelo de Hertz con el mecanismo de disipación visco-elástico.

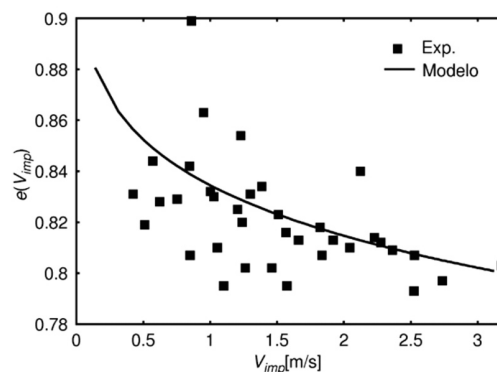


Figura 10. Coeficiente de restitución como función de la velocidad de impacto para una esfera de acetato de 5 mm. Los cuadrados sólidos representan los datos experimentales. La línea sólida indica la predicción basada en el modelo teórico de la Ecuación 14.  $\mu=100$  y  $\gamma=0.48$

## V. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este estudio se ha presentado alguna fundamentación básica la evaluación experimental del coeficiente de restitución aplicando tres métodos de estimación diferentes. Tanto el método del tiempo total de rebote como el método del tiempo de vuelo, permiten calcular valores del coeficiente de restitución independientes de la velocidad de impacto. La comparación de los valores efectivos de  $e$  por los dos métodos muestra magnitudes comparables y consistentes con valores experimentales previamente reportados. El método del tiempo de vuelo con dependencia de la velocidad revela una dependencia compleja de  $e$  con la velocidad de impacto. Dicha dependencia es consistente con datos experimentales previamente reportados[9]. El origen de este comportamiento no monótonico ha sido atribuido a los diferentes modos de vibración característicos de los objetos que intervienen en la interacción y que poseen tiempos comparables al tiempo de la colisión. Dicho comportamiento tiene implicaciones significativas, especialmente para el transporte de sonido donde pueden originarse fenómenos de resonancia.

Se propuso un modelo simplificado, basado en la teoría clásica de Hertz, el cual mediante un mecanismo de disipación visco-elástica reproduce de manera cualitativa y cuantitativa las observaciones experimentales reportadas. Para el rango de velocidades de impacto consideradas, el modelo predice un decrecimiento del coeficiente de restitución con la velocidad de impacto, en concordancia con la tendencia observada en los datos experimentales.

Desde una perspectiva aplicada, el potencial uso de los resultados del presente estudio se encuentra fundamentalmente en el desarrollo de disipadores de energía. La disipación mediante vibración de partículas es una combinación de disipación por impacto y disipación por fricción. Es un concepto muy simple en el cual se colocan partículas dentro de cavidades de la estructura de interés. Diversos materiales pueden aplicarse de acuerdo con los requerimientos de disipación. En contraste con los materiales visco-elásticos que disipan la energía elástica almacenada, la disipación mediante el uso de partículas se enfoca fundamentalmente a la disipación de energía mecánica. Experimentos actualmente en desarrollo en nuestro laboratorio, exploran el uso de esta técnica en diversas aplicaciones.

Desde la perspectiva académica es claro que el estudio del comportamiento de la interacción de una partícula con una superficie u otra partícula es un tópico muy relevante. Por ejemplo, resultados recientes por Farkas et al.[13] muestran claramente la interrelación entre las componentes tangenciales de rotación y deslizamiento para una partícula que se mueve sobre una superficie, i.e., la fricción y el torque muestran acoplamiento. Basados en estas observaciones y las ya efectuadas por McNamara y Luding [10] es posible intuir que las cuatro formas de restitución, i.e., normal, deslizamiento, giro y rodamiento estén acopladas, lo cual presenta consecuencias fundamentales para la física de medios granulares. Igualmente importante es la interacción de una partícula con una superficie en presencia de un fluido viscoso, donde nuevas formas de disipación entran en juego. Esto es particularmente

importante en flujos multifásicos donde la interacción entre las paredes y las partículas determina la dinámica del sistema[14]. Tanto estudios teóricos, numéricos como experimentales adicionales son necesarios para comprender tales comportamientos de mejor manera.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento al personal de los laboratorios de Ingeniería Civil de la Universidad Militar Nueva Granada (UMNG) por su colaboración en el desarrollo de las medidas experimentales. Este trabajo es financiado mediante el proyecto ING-2005-05 de la UMNG. El trabajo de Lyda M. Pineda, es apoyado financieramente mediante el programa de Jóvenes Investigadores de la UMNG.

## VII. REFERENCIAS

- [1] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. B. Behringer, *Reviews in Modern Physics* 68, 1259-1273 (1996).
- [2] P. B. Umbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney, *Nature* 382, 793-796 (1996).
- [3] W. L. Vargas y J.C. Murcia, *Ciencia e Ingeniería Neogranadina* 15, 138-152 (2005).
- [4] H. Xu, M. Louge, and A. Reeves, *Continuum Mech. Thermodyn.* 15, 321-349 (2003).
- [5] M. Alam et al., *Physics of Fluids* 14, 4085-4087 (2002).
- [6] L. Vu-Quoc et al., *J. Applied Mech.* 67, 363-371 (2000).
- [7] K.W. Chan et al., *Journal of Vibration and Control* 12, 297-312 (2006).
- [8] E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve and C. Coste, *Eur. Phys. J. B* 3, 45-57 (1998).
- [9] H. King , et al., *arXiv cond-mat/0209490* (2002).
- [10] S. McNamara and S. Luding, *Phys. Rev. E* 58, 2247-2250 (1998).
- [11] N. Farkas and R. D. Ramsier, *Physics Education* 41, 73-75 (2006).
- [12] K.L. Johnson, *Contact Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001), Chap. 4, p.84.
- [13] Z. Farkas et al., *Physical Review Letters* 90, 248302-1 (2003).
- [14] D. Legendre et al., *Chem. Eng. Sci.* 61, 3543-3549 (2006).