Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias
E-ISSN: 1697-011X
revista@apac-eureka.org
Asociación de Profesores Amigos de la Ciencia: EUREKA
España

Alegría, Pedro
SUCESIONES DE RECURRENCIA EN LA MATEMÁTICA RECREATIVA
Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, vol. 6, núm. 3, 2009, pp. 483-490
Asociación de Profesores Amigos de la Ciencia: EUREKA
Cádiz, España

SUCESIONES DE RECURRENCIA EN LA MATEMÁTICA RECREATIVA

Pedro Alegría

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco, Apartado 644, 48080-Bilbao. Correo electrónico: pedro.alegria@ehu.es

[Recibido en Febrero de 2009, aceptado en Junio de 2009]

RESUMEN(Inglés)

En este trabajo mostramos algunos aspectos recreativos relacionados con la sucesión de Fibonacci y otras sucesiones de recurrencia. Como aplicación didáctica, proponemos también algunos juegos y trucos basados en las propiedades de dicha sucesión.

Palabras clave: *Sucesión de Fibonacci; sucesiones de recurrencia; razón áurea*.

Grandes teorías matemáticas han tenido como fundamento motivos recreativos o diferentes tipos de juegos. Podemos destacar, entre otros, los juegos de azar que permitieron a Fermat y Pascal la creación de la *Teoría de la Probabilidad*, teoría en la que se basaron las compañías de seguros en sus inicios a mediados del siglo XVIII, y los juegos de estrategia iniciados a principios del presente siglo, que dieron lugar a la *Teoría Matemática de Juegos*.

En este artículo nos centraremos en algunos aspectos recreativos o ingeniosos proporcionados por una de las sucesiones numéricas más conocidas popularmente como es la llamada *sucesión de Fibonacci*. Otras sucesiones definidas por recurrencia nos permitirá también mostrar algunos problemas recreativos más o menos conocidos.

Creemos que los resultados aquí mostrados son apropiados para usos didácticos: por un lado, la búsqueda de explicaciones a los juegos permitirán desarrollar el pensamiento lógico de los estudiantes; por otro, pretendemos despertar su interés por cuestiones matemáticas más o menos alejadas de los contenidos específicos de los programas establecidos. No podemos estar más de acuerdo con las palabras del mejor divulgador de las matemáticas, Martin Gardner, cuando afirma (Gardner, 1975) que, en un nivel elemental, no es posible motivar a ningún alumno para aprender la teoría de grupos diciéndole que la encontrará hermosa, estimulante o incluso útil si algún día llega a ser un físico especializado en partículas, y añade:

> *"El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco mágico,*

una chanza, una paradoja, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades."

SUCESIÓN DE FIBONACCI

A Fibonacci, nombrado en los escritos medievales y renacentistas como Leonardo de Pisa (1170-1250), se le conoce, más que por su obra, por la serie recurrente en la que cada término es suma de los dos que le preceden:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

escrita por Leonardo en el margen del texto de su libro más conocido, *Liber abaci* (Leonardo de Pisa, 1202), en relación al famoso problema de los conejos, que es más un juego que un auténtico problema. Los matemáticos modernos han señalado importantes propiedades de esta serie, bautizada por Édouard Lucas como serie de Fibonacci, y llaman a sus elementos números de Fibonacci.

Si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $(n > 1)$, entonces se tiene la fórmula de Binet $a_n = \dfrac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$, donde $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618039...$ es la razón áurea, expresión que involucra números irracionales y que, sin embargo, da resultados enteros.

Podríamos enunciar una gran cantidad de propiedades de la sucesión de Fibonacci (Vorobiov, 1974; Enzensberger, 1997). Algunas que presentan propiedades recreativas son las siguientes:

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi$$

Debido a la velocidad de convergencia de esta sucesión y a que el resultado sigue siendo válido si la sucesión empieza con dos términos arbitrarios, proponemos realizar el siguiente experimento:

En una hoja de papel se escribe un número cualquiera; debajo de él se escribe otro número arbitrario; bajo ellos se escribe la suma de los dos números anteriores; se escribe un cuarto número que sea la suma de los dos últimos números escritos; se sigue este proceso hasta que se hayan escrito 10 números (cada uno de ellos será la suma de los dos números inmediatamente anteriores); para finalizar, se dividen entre sí los dos últimos números escritos, el último entre el penúltimo o viceversa. Se crea o no, es posible adivinar las primeras cifras de la parte decimal del resultado: son un 6, un 1, un 8, un 0, quizá un 3.	**Ejemplo:** 4 7 11 18 29 47 76 123 199 322

La explicación es sencilla: si se ha dividido el último entre el penúltimo, el cociente es una buena aproximación de φ ; si se ha dividido el penúltimo entre el último, el resultado se aproxima a $1/\varphi = \varphi - 1 = 0{,}618039\ldots$

ii) $a_1 + \ldots + a_{10} = 11 \cdot a_7$

Otro truco asociado a esta propiedad consiste en adivinar la suma de los diez términos de una sucesión construida del mismo modo que el ejemplo anterior. Basta multiplicar por 11 el séptimo término de la sucesión. Es un ejercicio sencillo pero ilustrativo probar esta última propiedad, dando valores arbitrarios a los términos a_1 y a_2.

iii) $a_{n+1} \times a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$ [Identidad de Cassini]

Es conocida la falacia geométrica que origina esta propiedad, como mostró Sam Loyd por primera vez en 1858.

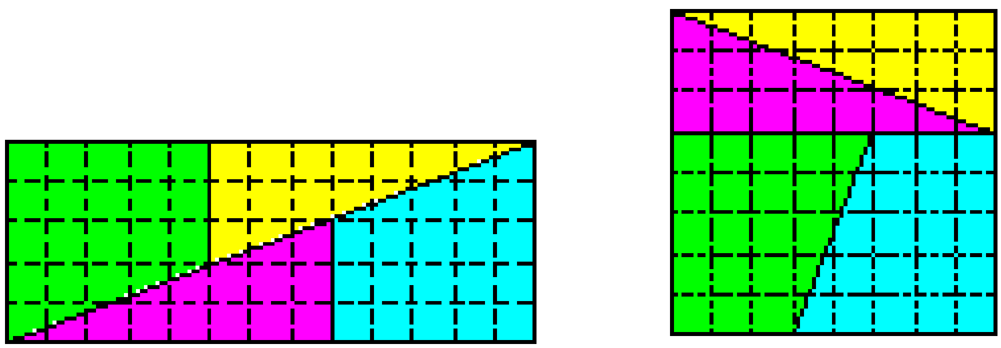

Figura 1.- *Prueba geométrica de que "65 = 64" (Alegría, 2006).*

La parte izquierda de la figura 1 muestra un rectángulo de área 5 x 13 = 65; dicho rectángulo se divide en cuatro piezas, las cuales se pueden recomponer para formar el cuadrado que se muestra en la parte derecha de la figura 1. Sin embargo, el área del cuadrado es igual a 8 x 8 = 64.

En general, si a_{n-1}, a_n, a_{n+1} son tres términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, un rectángulo de área $a_{n+1} \times a_{n-1}$ se puede dividir en cuatro regiones de modo que, al recomponerlas, se puede obtener un cuadrado de área a_n^2. Se comprende que los cortes así realizados hacen que las piezas no encajen exactamente. En todos los casos, la fórmula de Cassini indica que la diferencia de las áreas es igual a la unidad.

Algunas variantes y generalizaciones de esta falacia pueden encontrarse en Gardner (1965) y Alegría (2006).

iv) $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n} + a_1 - a_2; \quad a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - a_1$

Con esta propiedad, también válida para sucesiones cuyos dos primeros términos son arbitrarios, es fácil simular grandes dotes de calculista veloz pudiendo rápidamente calcular la suma de gran cantidad de términos pares e impares de la sucesión de Fibonacci.

v) $a_1 + \ldots + a_n = a_{n+2} - a_2$

Un truco de cálculo rápido asociado a esta propiedad es el siguiente: se pide que se escriban dos números cualesquiera. Con ellos se forma una sucesión donde cada elemento sea la suma de los dos anteriores. Se separan dos de ellos con una línea y, casi inmediatamente, se puede dar la suma de todos los que se encuentran antes de dicha línea. Basta restar el término que está dos lugares por debajo de la línea menos el segundo término de la sucesión.

Los elementos de la sucesión de Fibonacci dan también la respuesta al siguiente problema: *¿De cuántas formas distintas se puede subir una escalera si desde cada posición pueden subirse uno o dos escalones?*

En el caso de 4 escalones, las distintas soluciones son:

1111 – 112 – 121 – 211 - 22.

Se observa que, si el último paso es de un escalón, el número de posibilidades coincide con el número total de formas de subir la escalera con un escalón menos; además, si el último paso es de dos escalones, el número coincide con el número de posibilidades de subir la escalera con dos escalones menos. La fórmula que ilustra este hecho es $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Esta situación, con enunciado más serio, se aplica en problemas de trayectorias de rayos luminosos (el número de trayectorias posibles al experimentar *n* reflexiones entre dos láminas de vidrio es a_{n+2}).

En la Naturaleza, el estudio de la Filotaxia (disposición de hojas) ha descubierto la presencia de la sucesión de Fibonacci (ver por ejemplo Coxeter, 1988). Las estructuras florales están formadas por dos sistemas de espirales logarítmicas: las que tienen sentido horario y las de sentido antihorario. Usualmente, estos dos números son valores consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, las semillas de la flor del girasol tienen dos sistemas de espirales empezando desde el centro, 55 de ellas en sentido horario y 34 en sentido antihorario. También las piñas, coliflores y algunos cactus presentan esta característica.

La razón de este comportamiento está en el modo de composición de estas estructuras: cada capullo que se abre separa otros a su alrededor. A medida que se van formando nuevos capullos, al abrirse separan a los más recientes con más fuerza, mientras que los ya formados anteriormente son separados en menor medida. Esto naturalmente produce esa disposición en espiral.

En programación de ordenadores, la sucesión tiene aplicación en clasificación de datos, recuperación de información, generación de números aleatorios, etc.

OTRAS SUCESIONES DE RECURRENCIA

Estudiaremos a continuación otras sucesiones interesantes. La siguiente está relacionada con el triángulo de Pascal:

2 – 6 – 20 – 70 – 252 …

Por una parte, responde al problema de encontrar el número de caminos (sin dar pasos superfluos) mediante los que se puede cruzar en diagonal un conjunto de calles dispuestas en una estructura cuadrada, como en la figura 2.

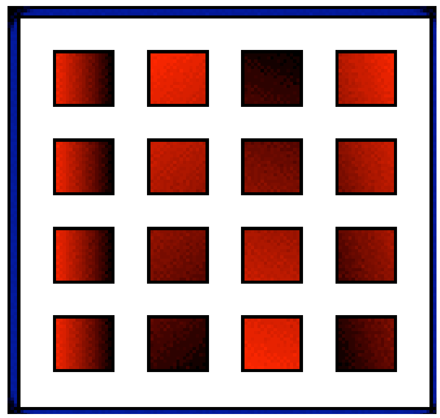

Figura 2.- *Recorrido en cuadrículas.*

Por otra parte, la sucesión corresponde a los elementos que están en la vertical principal del triángulo de Pascal.

1

1 1

1 **2** 1

1 3 3 1

1 4 **6** 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 **20** 15 6 1

Es interesante el hecho de que, si pensamos en distribuciones rectangulares, es decir con distinto número de filas que de columnas, el número de caminos posibles para cruzar de una esquina a la diagonalmente opuesta coincide con el resto de elementos del triángulo de Pascal.

Hay que advertir que nunca puede definirse una sucesión por los primeros términos, por muchos que sean. Por ejemplo, si queremos saber cuál es el elemento que sigue en la sucesión

1 – 2 – 3 – 4 – … – 37 – 38 – 39,

una respuesta obvia es 40 pero otra posibilidad sería 42, si consideramos que la sucesión está formada por los valores de n para los que la expresión $n^2 + n + 41$ es primo.

Otro ejemplo bien conocido es el de la sucesión de Leo Moser, que comienza por

1 – 2 – 4 – 8 – 16

y continúa con 31 pues su término general es $n + \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}$, en vez de 2^n, y corresponde al número máximo de regiones en que queda dividido un círculo uniendo *n* puntos de la circunferencia.

Enunciamos a continuación dos problemas que involucran sucesiones numéricas definidas mediante relaciones de recurrencia cruzadas.

(a) Se tienen dos depósitos de 6 litros cada uno y se realiza el siguiente proceso: en cada paso, se echa la mitad del contenido del primer depósito en el segundo y, a continuación, la mitad del contenido del segundo en el primero. Si se repite este proceso sucesivas veces, ¿cuál es la posición límite que se obtiene?

La respuesta a este problema es la siguiente. Si representamos por a_n y b_n al contenido del primero y segundo depósitos, respectivamente, a lo largo del proceso, entonces se tienen las relaciones

$$a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{4}$$

$$b_1 = 6, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4},$$

cuya solución (aplicando propiedades de las sucesiones numéricas) es $\lim a_n = 8$, $\lim b_n = 4$.

(b) **(Problema del asno de Buridan.)** *En dos lugares de un prado donde pasta un asno se colocan dos montones iguales de alfalfa. El asno se dirige a uno de ellos y, cuando ha recorrido la mitad de la distancia, se dirige hacia el otro montón, repitiéndose el cambio de dirección cada vez que recorre la mitad de la distancia que le separa del montón a donde se dirige. Se pide probar que el asno nunca llega a comerse la alfalfa.*

La solución es la siguiente. Para simplificar la notación, supondremos que los montones se encuentran en el origen y en un punto alejado una unidad del origen y que el asno está en la recta que une ambos puntos. La sucesión (x_n) que representa la distancia del asno al origen a lo largo del proceso se define por

$$x_1 = a \quad (0 < a < 1), \quad x_{2n} = \frac{x_{2n-1}}{2}, \quad x_{2n+1} = \frac{1 + x_{2n}}{2}.$$

Se puede probar por métodos analíticos que la sucesión de los términos pares tiene límite 1/3 y la de los impares 2/3, por lo que la sucesión completa no tiene límite y el asno no termina por decidirse si comer de uno u otro montón.

En su origen, este problema proporcionó un ejemplo para criticar la doctrina filosófica del libre albedrío defendida por el teólogo Jean Buridan (1300-1358), ya que conduce a una completa e irracional indecisión.

BIBLIOGRAFÍA

Alegría, P. (2006). Geometría recortable. *Sigma* 28, 95-115.

Coxeter, H.S.M. (1988). *Fundamentos de Geometría.* México: Limusa.

Enzensberger, H. (1997). *El diablo de los números.* Madrid: Siruela.

Gardner, M. (1965). *Mathematics, Magic and Mystery.* New York: Dover.

Gardner, M. (1975). *Carnaval matemático.* Madrid: Alianza Editorial.

Leonardo de Pisa (1202). *Liber Abaci* (traducido al inglés por L. Sigler, Springer-Verlag, New York, 2002).

Vorobiov, N. (1974). *Números de Fibonacci.* Moscú: Mir.

RECURSIVE SEQUENCES IN RECREATIONAL MATHEMATICS

SUMMARY

In this work, some recreational aspects related to the Fibonacci sequence, as well as other recursive sequences, are shown. Moreover, in order to provide an educational application, some games and tricks based in the properties of that sequence are proposed.

Keywords: *Fibonacci sequence; recursive sequences; golden ratio.*