Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias
E-ISSN: 1697-011X
revista@apac-eureka.org
Asociación de Profesores Amigos de la Ciencia: EUREKA
España

SACÁNDOLE MÁS JUGO AL PROBLEMA DE LA CORONA. SEGUNDA PARTE: EL TRATAMIENTO CUANTITATIVO[1]

Josip Slisko

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

[Recibido en Marzo de 2005, aceptado en Septiembre de 2005]

RESUMEN

En este trabajo se discuten de forma crítica algunas formulaciones y formas de resolución del problema de la corona de Arquímedes, analizando cuáles son más apropiadas para los alumnos de secundaria. Aunque no se sabe con certeza cómo el propio Arquímedes abordó el problema de la corona, es posible reflexionar acerca de cuáles fueron las posibles vías de solución acordes con el estado de conocimiento de física y matemática en la época de Arquímedes. Tal reflexión en el aula daría a los estudiantes una oportunidad de ver cómo se podrían aplicar los conceptos de densidad y de fuerza de empuje para solucionar el mismo.

Palabras clave: *Corona de Arquímedes, densidad, fuerza de empuje, resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN

En la primera parte de este trabajo (Slisko, 2005) se analizaron los aspectos básicos de las diferentes versiones de la leyenda elaboradas en nueve libros de texto de física para ESO en España. Después, con el fin de "sacarle más jugo" al problema de la corona y evitar algunos errores frecuentes en el uso del problema de la corona en la enseñanza de la física, se propuso un enfoque didáctico que enfatiza los aspectos conceptuales, visuales y cognitivos del problema y de su solución.

En esta segunda parte se presenta primero la solución común de la formulación débil del problema (Slisko, 1997), en la se trata de responder a la pregunta: ¿la corona está hecha de oro? A continuación se desarrollan diferentes posibilidades de un tratamiento cuantitativo de la resolución de la formulación fuerte del problema (Slisko, 1997) en la que el interrogante es:

> *Si la corona está hecha de una mezcla de oro y plata, ¿cuál es el porcentaje de plata (o de oro) en la corona?*

La solución está dada en dos formatos. En el primero, para solucionar el problema es indispensable conocer explícitamente las densidades de la corona, oro y plata. En el segundo, el procedimiento parte de las mediciones mencionadas en la leyenda y está basado en el razonamiento proporcional, la forma del razonamiento matemático más cercano al empleado comúnmente en la época de Arquímedes. Es importante destacar que en ese procedimiento no es necesario conocer explícitamente las densidades de oro y plata. Sin embargo, el precio que se tiene que pagar por eso es la necesidad de disponer de los patrones de plata y oro cuyas masas son iguales a la masa de la corona.

LA SOLUCIÓN CUANTITATIVA DEL PROBLEMA EN SU FORMULACIÓN DÉBIL

Como se ha dicho, en la formulación débil del problema de la corona se tiene que determinar si la misma está hecha de oro puro o no. El problema se resuelve buscando la densidad relativa de la corona:

> *Se pesa la corona en el aire y sumergida en el agua. Los valores del peso y del peso aparente permiten encontrar la densidad de la corona* (Blatt, 1991, pp. 245–246; Gettys, Keller y Skove, 1991, Ejercicio 15.20, p. 401; Hecht, 2000, pp. 307–308).

Si la densidad calculada coincide con la densidad del oro puro, entonces la corona está hecha del mismo metal. Si no es así, la corona no está hecha del oro puro.

Enseguida se presenta un ejemplo concreto de ese enfoque:

> *"Cuando una corona con una masa de 14.7 kg se sumerge en agua, un dinamómetro marca una masa efectiva de 13.4 kg... ¿Es dicha corona de oro?*
>
> SOLUCIÓN: *El peso aparente del objeto sumergido, w', es igual a su peso real w menos la fuerza de flotación* F_B*:*
>
> $$w' = w - F_B = \rho_0 gV - \rho_F gV,$$
>
> *en la que V es el volumen del objeto,* ρ_0 *su densidad y* ρ_F *la densidad del fluido, que, en este caso, es agua. Para la ecuación de arriba, podemos ver que* $w - w' = \rho_F gV$*. Entonces podemos escribir:*
>
> $$\frac{w}{w - w'} = \frac{\rho_0 gV}{\rho_F gV} = \frac{\rho_0}{\rho_F}.$$
>
> *... Para la corona tenemos que:*
>
> $$\frac{\rho_0}{\rho_{agua}} = \frac{w}{w - w'} = \frac{(14.7kg)g}{(14.7kg - 13.4kg)g} = \frac{14.7kg}{1.3kg} = 11.3.$$
>
> *Esto corresponde a una densidad de 11,300 kg/m*^{3}*. Al parecer la corona está hecha de plomo..."* (Giancoli, 1997, Ejemplo 10-4, p. 268).

No sobra destacar que este tipo de solución requiere el conocimiento de los valores de densidades de diferentes materiales. Como Arquímedes no contaba con ese conocimiento (y tampoco pudo apoyarse en el procedimiento analítico usado arriba), es una falsificación de la historia del pensamiento científico sugerir que la estrategia de la solución citada fue la suya. Sin embargo, es muy común encontrar precisamente esta sugerencia en los libros de texto de física universitaria (Tipler, 1991, p. 341; Jones and Childers, 1990, p. 269, Problema 9.23, p. 290) o de secundaria (Gutiérrez Aranzeta y Cepeda García, 1998, p. 82)

LA SOLUCIÓN CUANTITATIVA DEL PROBLEMA DE LA CORONA EN SU FORMULACIÓN FUERTE

En la formulación fuerte del problema de la corona se pide encontrar el porcentaje del oro o de la plata en la corona. Enseguida se presentan diferentes soluciones de ese problema en función de la información disponible.

El porcentaje en términos de las densidades de la corona, plata y oro

Hace un siglo la formulación fuerte del problema fue propuesta por Millikan como un ejercicio del fin de capítulo:

> *"Arquímedes descubrió su principio cuando intentada detectar el supuesto fraude en la fabricación de una corona hecha par el tirano de Siracusa. Se pensaba que fue hecha de una aleación de oro y plata en lugar de oro puro. Si la corona pesaba 1000 gramos en aire y 940 gramos en agua, encontrar cuántos gramos de oro y cuántos de plata se usaban en la fabricación. Supón que el volumen de una aleación es igual a la suma de volúmenes de sus componentes y toma para la densidad de oro 19.3 y de plata 10.5." (Millikan, 1903, Problem 3, p. 180).*

Para encontrar el porcentaje de oro en la corona se van usar los símbolos presentados en la Tabla 1.

Masa	Volumen	Densidad
Corona (m_c)	Corona (V_c)	Corona (ρ_c)
Oro en la corona (m_{oc})	Oro en la corona (V_{oc})	Oro (ρ_o)
Plata en la corona (m_{pc})	Plata en la corona (V_{pc})	Plata (ρ_p)

Tabla 1. *La simbología para las cantidades del problema.*

La resolución del problema se basa en dos suposiciones:

(a) la masa de la corona es igual a la suma de las masas de oro y plata (la conservación de masa):

$$m_c = m_{oc} + m_{pc}.$$

(b) el volumen de la corona es igual a la suma de los volúmenes de oro y plata (no se cumple exactamente para la aleación de oro y plata, pero sirve como la primera aproximación):

$$V_c = V_{oc} + V_{pc}.$$

El porcentaje de oro en la corona (con respecto a la masa) es:

$$\frac{m_{oc}}{m_c} = \frac{m_c - m_{pc}}{m_c} = 1 - \frac{m_{pc}}{m_c} = 1 - \frac{\rho_p}{\rho_c} \cdot \frac{V_{pc}}{V_c}.$$

Para encontrar el cociente (V_{pc}/V_c), es conveniente expresar la conservación de masa en la siguiente forma:

$$\rho_c V_c = \rho_o V_{oc} + \rho_p V_{pc}.$$

Tomando en cuenta la suposición sobre la conservación de volumen ($V_{oc} = V_c - V_{pc}$), se tiene:

$$\rho_c V_c = \rho_o (V_c - V_{pc}) + \rho_p V_{pc} = \rho_o V_c - \rho_o V_{pc} + \rho_p V_{pc} = \rho_o V_c - V_{pc}(\rho_o - \rho_p).$$

De aquí se obtiene:

$$\frac{V_{pc}}{V_c} = \frac{\rho_o - \rho_c}{\rho_o - \rho_p}.$$

Insertando esa expresión en la formula para el porcentaje de oro en la corona y haciendo operaciones algebraicas correspondientes, se llega a:

$$\frac{m_{oc}}{m_c} = \frac{\rho_o(\rho_c - \rho_p)}{\rho_c(\rho_o - \rho_p)}.$$

Para los datos que supuso Millikan (la densidad relativa de la corona 16.67), el porcentaje de oro en la corona es aproximadamente 81.18 % (es decir, la masa de oro en la corona es de 811.8 gramos).

Cabe destacar que hoy en día son muy pocos los autores que proponen este problema a los estudiantes en los cursos de la física introductoria *(Jones and Childers, 1990, Problema 9.23, p. 290).*

Tomando en cuenta la complejidad algebraica de los pasos de la solución expuesta arriba, es sorprendente que este problema aparezca como una “pregunta para pensar” en un curso con el ligero uso de matemática (Culver, 1993, Thought Question 22, p. 209) o como un “problema ejemplo” en un libro de texto de física para secundaria (Gutiérrez Aranzeta y Cepeda García, 1998, Problema ejemplo 2, p. 83).

El porcentaje de plata en la corona en términos de los volúmenes de la corona y de los patrones de plata y oro

En la época de Arquímedes no se conocían los valores de la densidad tales como aparecen en los manuales actuales. Por eso, para la solución del problema el porcentaje de la plata en la corona se tenía que expresar en términos de las cantidades que se prestaban a una medición directa. Veamos primero la posibilidad de expresarla en términos de los volúmenes de la corona y los patrones de plata y oro con la masa igual a la masa de la corona. En la derivación de la fórmula se usarán los símbolos de la **Tabla 2**.

Volumen	Masa
Corona (V_c)	Corona (m_c)
Patrón de plata (V_p)	Patrón de plata (m_p=m_c)
Patrón de oro (V_o)	Patrón de oro (m_o=m_c)

Tabla 2. *Los símbolos para la corona y los patrones.*

Se mantienen la suposición de la conservación de masa:

$$m_c = m_{pc} + m_{oc}.$$

y la de la conservación de volumen:

$$V_c = V_{pc} + V_{oc}.$$

También valen las siguientes proporciones (la masa es proporcional al volumen, en que entra la densidad de manera implícita):

$$\frac{m_o}{m_{oc}} = \frac{V_o}{V_{oc}}$$

$$\frac{m_{pc}}{m_c} = \frac{V_{pc}}{V_p}$$

La derivación de la expresión para el porcentaje con que la plata contribuye a la masa de la corona sería la que sigue:

$$\frac{m_{pc}}{m_c} = 1 - \frac{m_{oc}}{m_c} = 1 - \frac{m_{oc}}{m_o} = 1 - \frac{V_{oc}}{V_o} = \frac{V_o - V_{oc}}{V_o}$$

$$V_o \frac{m_{pc}}{m_c} = V_o - V_c + V_{pc} = V_o - V_c + V_p \frac{m_{pc}}{m_p}$$

$$(V_p - V_o)\frac{m_{pc}}{m_c} = (V_c - V_o)$$

$$\frac{m_{pc}}{m_c} = \frac{V_c - V_o}{V_p - V_o} \qquad (1)$$

El porcentaje de plata en la corona en términos de los pesos aparentes de la corona y de los patrones de plata y oro

Como se comentó en la primera parte (Slisko, 2000), la medición de los volúmenes involucrados puede resultar no muy precisa. Por eso, es preferible encontrar el porcentaje de oro y plata en la corona a partir de las mediciones en que se usa la balanza (pesos aparentes o fuerzas de empujes).

En la derivación de la fórmula que determina el porcentaje de la plata en la corona se usarán los símbolos de la Tabla 3.

Peso en el aire	Peso aparente en el agua
Corona (P_c)	Corona (W_c)
Patrón de oro ($P_o = P_c$)	Patrón de oro (W_o)
Patrón de plata ($P_p = P_c$)	Patrón de plata (W_p)

Tabla 3. *Los símbolos para la corona y los patrones*.

Para el peso de la corona en el aire y en el agua es natural suponer:

$$P_c = P_{pc} + P_{oc}$$

$$W_c = W_{pc} + W_{oc},$$

donde P_{pc}, W_{pc}, P_{oc} y W_{oc} son pesos y pesos aparentes de plata y oro en la corona.

Como la pérdida porcentual del peso en el agua no depende del tamaño del material, valen también las siguientes proporciones:

$$\frac{P_{pc}}{W_{pc}} = \frac{P_p}{W_p}$$

$$\frac{P_{oc}}{W_{oc}} = \frac{P_o}{W_o}$$

De esas expresiones es posible derivar el porcentaje de plata en la corona en términos de pesos aparentes en la siguiente manera.

$$\frac{P_{pc}}{P_c} = 1 - \frac{P_{oc}}{P_o} = 1 - \frac{W_{oc}}{W_o}$$

$$W_o \cdot \frac{P_{pc}}{P_c} = W_o - W_c + W_{pc} = W_o - W_c + W_p \cdot \frac{P_{pc}}{P_c}$$

$$\frac{P_{pc}}{P_c} = \frac{W_o - W_c}{W_o - W_p} \qquad (2)$$

Esta fórmula se puede derivar de una manera más breve usando explícitamente el razonamiento proporcional.

A la perdida porcentual de peso de la corona contribuyen las perdidas porcentuales de peso de plata y de oro en la corona, según su “participación” en el peso de la corona:

$$\frac{W_c}{P_c} = \frac{W_p}{P_c} \cdot x + \frac{W_o}{P_c} \cdot (1 - x),$$

donde *x* es el buscado porcentaje de la plata en el peso de la corona.

Multiplicando la ecuación por P_c y despejando x, tomando en cuenta que $W_o > W_p$, se tiene:

$$x = \frac{W_o - W_c}{W_o - W_p}.$$

¿Depende el porcentaje de la plata en corona de las cantidades que se miden?

Suponiendo que sería posible medir los volúmenes con la misma precisión como los pesos aparentes, la respuesta a la pregunta es negativa, es decir, el porcentaje de la plata en la corona sería el mismo sin importar qué cantidades se midan.

Para demostrar esa afirmación, asignamos a las fuerzas de empujes sobre la corona y los patrones de plata y oro los símbolos F_c, F_p *y* F_o. Entonces, los pesos aparentes se pueden expresar mediante las ecuaciones:

$$W_o = P_c - F_o\,;$$

$$W_c = P_c - F_c\,;$$

$$W_p = P_c - F_p\,.$$

Insertándolas en la ecuación (2), se obtiene el porcentaje de plata en la corona en términos da las fuerzas de empuje:

$$\frac{P_{pc}}{P_c} = \frac{F_c - F_o}{F_p - F_o} \qquad (3)$$

Según la ley de Arquímedes, esas fuerzas de empujes son iguales a los pesos de agua desalojada por la corona y los patrones de oro y plata:

$$F_c = \rho g V_c\,;$$

$$F_o = \rho g V_o\,;$$

$$F_p = \rho g V_p\,.$$

Insertando esas expresiones en la ecuación (3), se obtiene la fórmula:

$$\frac{P_{px}}{P_c} = \frac{\rho \cdot g(V_c - V_o)}{\rho \cdot g(V_p - V_o)} = \frac{V_c - V_o}{V_p - V_o},$$

la que coincide, como es fácil de ver, con la ecuación (1).

CONCLUSIÓN

Si un objetivo importante de la enseñanza de la física es promover una visión adecuada de la naturaleza de la empresa científica, entonces atribuir a Arquímedes una solución basada en la información y los procedimientos no conocidos en su época es falsear la historia y dejar a los estudiantes sin una idea adecuada sobre el desarrollo del conocimiento científico.

Por eso es importante, como se hizo en este escrito, presentar a los estudiantes diferentes vías para encontrar el porcentaje de la plata en la corona, usando diferentes cantidades para expresarlo. Pues, como bien lo dijo Feynman, aprendemos mucho más resolviendo un problema mediante tres métodos diferentes que resolviendo tres diferentes problema mediante un mismo método. Cuando estos diferentes métodos corresponden a diferentes tiempos históricos, los estudiantes podrán construir una visión más adecuada sobre la evolución de la metodología científica.

Diferentes soluciones cuantitativas del problema de la corona permiten discutir con más claridad ese aspecto de la ciencia. Cuando se ve la solución basada en el uso de las densidades de la corona, plata y oro, en que basta solamente una medición (peso aparente de la corona en agua), parece innecesario contar con los patrones de plata y oro como se narra en la leyenda. No es imposible que algunos estudiantes pudieran llegar por eso a la conclusión errónea de que Arquímedes era menos listo que los físicos de hoy. Para prevenir esas conclusiones, es importante aclarar que ese procedimiento “complicado” era la consecuencia necesaria del estado de conocimiento en aquella época y que las soluciones que hoy parecen “complicadas”, de hecho, son evidencia de la impresionante flexibilidad del ingenio humano de resolver los problemas con los recursos disponibles, tanto del índole conceptual como metodológico.

REFERENCIAS

BLAT, F. J. (1991). *Fundamentos de Física*. Tercera edición. Naucalpan de Juárez: Prentice–Hall Hispanoamericana.

CULVER, R. B. (1993). *Facets of Physics: A Conceptual Approach*. Minneapolis/St. Paul, IN: West Publishing Company.

GIANCOLI, D. C. (1997). *Física. Principios con aplicaciones*. Cuarta edición. México, D. F.: Prentice-Hall Hispanoamericano.

GETTYS, W. E., KELLER, F. J. y SKOVE, M. J. (1991). *Física. Clásica y Moderna*. Madrid: McGraw-Hill.

GUTIÉRREZ ARANZETA, C. y CEPEDA GARCÍA, M. L. (1998). *Física 2*. México, D.F.: Larousse.

HARTMAN HODDESON, L. (1972). How Did Archimedes Solve King Hiero’s Crown Problem? – An Unaswered Question. *The Physics Teacher*, 10 (1), 14 – 19.

HECHT, E. (2000). *Física 1. Álgebra y Trigonometría.* México, D. F.: International Thomson Editores.

JONES, E. R. y CHILDERS, R. L. (1990). *Contemporary College Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

MILLIKAN, R. A. (1903). *Mechanics, Molecular Physics, and Heat*. A Twelve Weeks' College Course. Boston: Ginn and Company

SLISKO, J. (1997). La corona de Herón en la enseñanza de la física. *Boletín de la Sociedad Mexicana de Física*, 11 (4), 231 – 232.

SLISKO, J. (2005). Sacándole más jugo al problema de la corona. Parte 1: El tratamiento conceptual. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 2(3), pp. 364-373. En línea en: http://www.apac-eureka.org/revista/Larevista.htm.

TIPLER, P. A. (1991). *Physics for Scientists and Engineers*. Third Edition. New York: Worth Publishers.

[1] *El artículo fue primero publicado en gallego en Boletín das Ciencias de Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia (Volumen 41, Febrero de 2000, pp. 33–42).*