



Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana  
de Inteligencia Artificial

ISSN: 1137-3601

revista@aepia.org

Asociación Española para la Inteligencia  
Artificial  
España

Sala, Antonio; Picó, Jesús; Bondia, Jorge  
Tratamiento de la incertidumbre en modelado y control borrosos  
Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, vol. 4, núm. 10, verano, 2000, p.  
0  
Asociación Española para la Inteligencia Artificial  
Valencia, España

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=92541013>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica  
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Tratamiento de la incertidumbre en modelado y control borrosos.

Antonio Sala, Jesús Picó, Jorge Bondia

Dept. de Ing. de Sistemas y Automática.

Universidad Politécnica de Valencia

Apdo. 22012, E-46071 Valencia

{asala, jpico, jbondia}@isa.upv.es

## Resumen

En este artículo se discute la necesidad de integrar el tratamiento de la incertidumbre en los sistemas borrosos para no perder parte del significado original que dio lugar al uso de dichos sistemas. Se plantean dos líneas al respecto en modelado y estabilidad de sistemas de control.

## 1 Introducción.

Una de las principales metas en control inteligente de procesos industriales es la construcción de sistemas borrosos que controlen con garantía sistemas complejos de alta dimensionalidad, mediante implementaciones generales, robustas y fácilmente entendibles por el usuario.

En la práctica actual en un entorno industrial complejo, la aplicación de técnicas de control inteligente basadas en redes neuronales con capacidades de aprendizaje está en un estadio inicial. Sin embargo, los usuarios aceptan con relativa facilidad e interés las aplicaciones basadas en lógica borrosa, por el paralelismo con su propio razonamiento y por la capacidad de explicación de las conclusiones. El éxito en control de la aplicación de la lógica borrosa se debe a la capacidad de la misma de utilizar modelos de conceptos ambiguos para *reducir la complejidad intuitiva* de un proceso, de manera que permite realizar operaciones de control, planificación y supervisión, aunque sea de un modo aproximado o heurístico, sobre plantas no lineales o/y variantes en el tiempo.

La integración de técnicas borrosas y neuronales da lugar a estructuras neuroborrosas que en bastantes casos combinan la interpretación lingüística con una estructura regresiva lineal en los parámetros que permite resultados formales sobre aprendizaje [15, 9, 1]. El concepto base del enfoque es la *granularidad o localidad*. El aprendizaje realiza dos tipos de modificaciones: *paramétricas* y *estructurales* (adición y eliminación de reglas, reconfiguración), producidas por detección de contradicciones, funcionamiento poco satisfactorio, fallos, etc.

Pese a la fama y aceptación que los sistemas borrosos de control están ganando, muchos diseños teóricos actuales están pensados para procesos de baja dimensionalidad, o en procesos multivariantes poco acoplados. Asimismo, el control borroso, originado a partir de una lógica de conceptos “vagos” e “imprecisos”, se utiliza en la mayoría de los casos para aproximación de funciones precisas, deterministas, contradiciendo con ello parte de los pretextos argüidos para fundamentar la utilidad de la lógica borrosa en control. En ese contexto, pues, se ha perdido parte del espíritu inicial de la lógica borrosa como “computación con palabras y concep-

tos”. Se trata de un esquema de procesamiento numérico o una interfaz sencilla para interpolación. Una lista de parámetros  $\theta^i$  en una suma de funciones es un modelo en algunos casos útil, pero relativamente pobre, de la complejidad del conocimiento humano sobre un proceso.

Lo que los sistemas industriales complejos tienen en común es la presencia de una elevada incertidumbre que hace que las estrategias usuales basadas en modelos y principio de equivalencia cierta no sean técnicamente aplicables. La presencia de elevada incertidumbre suele requerir reguladores “cautos”, de baja ganancia. En muchas ocasiones, cuando reguladores borrosos son usados en este tipo de entornos las capacidades de los mismos son a veces exageradas, sin comparación adecuada con otros reguladores (por ej. PID), o son resultado de un ajuste fino por métodos manuales de ensayo y error, con lo cual el método no es generalizable y repetible a otras plantas.

Existen dos fuentes de incertidumbre que deben ser tratadas por parte del control inteligente. La primera es la incertidumbre del modelo del proceso: la variabilidad o escaso conocimiento sobre el mismo hace que, en muchos casos, sólo se disponga de un modelo intuitivo que describe comportamientos de orden bajo, a escalas de tiempo grandes. En otras ocasiones, la incertidumbre del modelo recae, aún conociendo bien las ecuaciones que lo describen, en los parámetros del mismo, que son conocidos de forma aproximada. La segunda fuente de incertidumbre es la presente en las especificaciones de control: los índices de optimización relativos a calidad final y coste de producción son expresados de forma cualitativa ambigua. En la práctica, la experiencia del operador humano se usa para fijar referencias para reguladores jerárquicamente inferiores.

Todas estas cuestiones obligan a argumentar que el conocimiento realmente “inteligente” debería incluir información sobre su propia validez en términos de cantidad y calidad del conocimiento. Así, se plantea la idea de que la validación y el tratamiento de la incertidumbre en sistemas de control inteligente son facetas que deben ser incorporadas en futuros desarrollos para aumentar el grado de autonomía de dichos sistemas y mejorar los sistemas de aprendizaje.

Esta contribución introducirá dos posibilidades

para tratar con la incertidumbre en modelos borrosos. Primero se presentará un esquema de identificación de modelos ambiguos mediante una reinterpretación del significado de las reglas borrosas. Estos modelos podrán ser usados para estrategias de control. Una visión diferente se presentará en las últimas secciones en las que se tratará de analizar la estabilidad de sistemas de ecuaciones conocidas pero de alguno de cuyos parámetros físicos la información disponible es de tipo lingüístico (un conjunto borroso).

## 2 Modelado de funciones ambiguas.

A continuación se planteará una redefinición del concepto de inferencia y su aplicación a modelado de funciones ambiguas [12, 13]. La base es plantear una equivalencia entre una regla y una ecuación o inecuación del siguiente modo:

**Definición 1** Sean  $u$  e  $y$  dos variables numéricas pertenecientes a dos universos de discurso (de entrada  $U$  y salida  $Y$ , respectivamente), y sean  $A \subset U$  y  $B \subset Y$  dos conjuntos borrosos definidos por las funciones de pertenencia  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$  y  $\mu_B : Y \rightarrow [0, 1]$ .

Entonces, la regla “Si  $u$  es  $A$ , entonces  $y$  es  $B$ ” se define equivalente a la inecuación:

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(y) \quad (1)$$

y la regla “Si y sólo si  $u$  es  $A$ , entonces  $y$  es  $B$ ” se define equivalente a  $\mu_A(u) = \mu_B(y)$ .

**Definición 2** Dada una base de reglas, se define como conclusión ideal de la misma al conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones equivalente, supuestas conocidas el valor de ciertas variables (premisas).

**Ejemplo.** La base de reglas:

- 1-  $u$  es Bajo  $\Rightarrow y$  es No Bajo Y  $z$  es Bajo
- 2-  $u$  es Medio  $\Leftrightarrow y$  es Bajo
- 3-  $u$  es Alto  $\Rightarrow y$  es Alto O  $z$  es Alto

se define equivalente al sistema de ecuaciones:  
 $Bajo(u) \leq \min(1 \Leftrightarrow Bajo(y), Bajo(z))$ ,

$$\begin{aligned} Med(u) &= Bajo(y) , \\ Alto(u) &\leq \max(Alto(y), Alto(z)). \end{aligned}$$

La inferencia consiste en, para un particular  $u$ , calcular qué valores de  $y$  y  $z$  verifican las ecuaciones e inecuaciones, dadas las funciones de pertenencia. En el caso, por ejemplo, en el que  $Bajo(u)=0.5$  y  $Medio(u)=0.6$ , no existiría solución: en ese caso, se dice que existe contradicción (entre las reglas 1 y 2).

Nótese que la deborrosificación *no existe* en este esquema como ente teórico básico. La presencia de deborrosificadores en un esquema práctico supone, simplemente, un algoritmo rápido de obtener, en determinadas circunstancias, una solución a los sistemas de ecuaciones para determinadas configuraciones “válidas” de conjuntos borrosos.

**Definición 3** *Si el sistema de ecuaciones equivalente a una base de reglas no tiene solución se dirá que la base es contradictoria. Si la tiene se dirá que es coherente. Si tiene más de una solución, se dirá que es incompleta y si la solución es la misma tras eliminar una ecuación se dirá que la regla correspondiente es redundante.*

Para posibilitar la inferencia ante bases de reglas contradictorias se definirá un índice de contradicción asociado a cada regla denominado error de inferencia. Este error de inferencia  $\epsilon : U \times Y \rightarrow [0, 1]$  tiene la expresión:

$$\epsilon_{IF}(u, y) = \begin{cases} 0 & \mu_A(u) \leq \mu_B(y) \\ \mu_A(u) \Leftrightarrow \mu_B(y) & \mu_A(u) > \mu_B(y) \end{cases} \quad (2)$$

El error de inferencia es nulo si  $y$  es una conclusión ideal de la regla ante  $u$ . El error es 1 si  $y$  contradice totalmente a la regla ante la premisa  $u$ . Con el error de inferencia de cada regla se construye una función de error de inferencia acumulada de una base de  $N$  reglas:

$$\epsilon(u, y) = \left( \sum_{i=1}^N \phi_i(u, y) \epsilon_i(u, y)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

donde  $p$  es un parámetro decidible por el usuario con valor de referencia unidad. Las funciones  $\phi_i$  son ponderaciones interpretables como coeficientes de confianza, definidos por el diseñador de la base de reglas.

Así, la inferencia ideal (def. 2) se generaliza definiendo la *conclusión ideal* como los valores de  $y$  que minimizan  $\epsilon(u, y)$ . De este modo, la inferencia se convierte en la minimización de un índice de *coste de contradicción*.

**Definición 4**  *$f(u)$  es una función genérica que se pretende modelar con la base de reglas (usada como aproximador funcional), entonces se dirá que la base de reglas modela coherentemente a la función si  $\epsilon(u, f(u)) = 0$  para todo  $u \in U$ .*

En ese caso, puede probarse que los antecedentes ( $A_i$ ) y consecuentes ( $B_i$ ) de las reglas verifican  $A_i \subseteq f^{-1}(B_i)$ , donde  $f^{-1}$  se define según el principio de extensión  $\mu_{f^{-1}(B_i)}(u) = \mu_{B_i}(f(u))$ .

Esta interpretación funcional basada en el principio de extensión permite explicar determinados procedimientos intuitivos para la construcción de bases de reglas que aseguren la coherencia, así como algoritmos de aprendizaje de mínima contradicción como el que se detalla a continuación.

## 2.1 Selección óptima de consecuentes.

Sea una base de antecedentes  $\mathcal{A}$ , y un conjunto de datos experimentales  $(u^k, y^k)$ . Se desea diseñar una base de reglas coherente con los mismos, lo menos ambigua posible (según las definiciones anteriores).

Para ello, para cada antecedente, con cada punto  $(u, y)$  experimental se trazará una marca en la gráfica de los consecuentes por determinar en el punto  $(y, \mu_A(u))$  donde  $\mu_A$  es la función de pertenencia del antecedente.

Dado que la definición 4, según (2) requiere para coherencia que el consecuente tenga pertenencia mayor que la de los antecedentes, cualquier consecuente que incluya bajo él a todas las marcas será un consecuente coherente. Se escogerá al más pequeño de entre los que tengan una forma prefijada por el diseñador (por ejemplo, trapezoidal).

**Ejemplo.** La gráfica 1 presenta datos obtenidos de una válvula con ruido. Mediante el

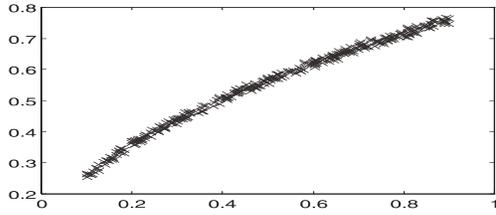


Figura 1: Datos de una válvula.

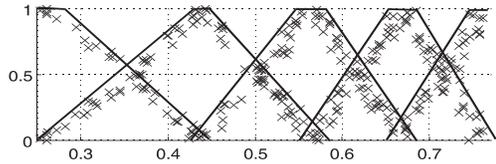


Figura 2: Consecuentes óptimos.

método descrito se obtienen para una partición triangular de antecedentes sobre el intervalo  $[0.1, 0.9]$  los consecuentes trapezoidales más pequeños coherentes con los datos (figura 2).

Los antecedentes son una partición de suma 1. Si los datos hubieran sido deterministas (sin incertidumbre), los consecuentes también hubieran sido una partición de suma 1. Si el nivel de ruido en los datos experimentales aumenta, la superposición de los consecuentes obtenidos también lo hace.

Una vez se dispone de este modelo, la interpretación de las reglas como inecuaciones hace que la conclusión para inferencia ideal de cada regla sea un intervalo, y la conclusión global sea la intersección de todos los correspondientes a cada regla. Con ello se consigue replicar aproximadamente el tipo de funciones inciertas que originaron los datos de partida.

Obviamente, el coste de una incertidumbre excesiva se traduce en modelos demasiado genéricos que no permitirían diseñar buenos reguladores. El algoritmo propuesto genera una base de reglas coherente con *todos* los datos experimentales. Quizás alguno de ellos no sea válido (*outliers*). Existe un compromiso entre la pérdida de utilidad de un modelo demasiado vago y la contradicción con algunos de los datos experimentales (figura 3). Esto se implementa con modificaciones del algoritmo que lo convierten en una optimización.

**Control.** El objetivo de estos modelos es que se usen en predicción, control o detección de

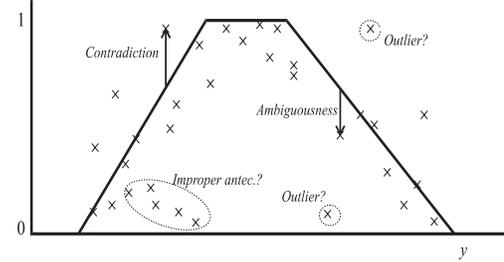


Figura 3: Ambigüedad vs. contradicción.

fallos. En el caso del control, una forma sencilla de abordar el problema es la inversión de modelos borrosos del proceso basándose en las ecuaciones equivalentes (si la dinámica inversa es estable): las ecuaciones del regulador son las mismas que las del proceso, pero se trata de inferir  $u$  suponiendo conocida una referencia  $y_{ref}$ . Si el modelo es ambiguo (base de reglas incompleta) este resultado produce las acciones de control que *posiblemente* dan  $y_{ref}$ . Para manejar la ambigüedad en el modelo, se deberá calcular el conjunto de acciones de control que *necesariamente* produzcan una salida en  $[y_{ref} \pm \delta, y_{ref} + \delta]$  como el complementario de las que produzcan posiblemente una salida *fuera* del intervalo objetivo. En [12, 14] se detallan ejemplos de aplicación a control por linealización por realimentación y control deslizante.

### 3 Incertidumbre paramétrica borrosa.

El marco tradicional de la lógica borrosa es el modelado intuitivo de sistemas, basados en una colección de reglas *si-entonces* donde se expresa el conocimiento sobre el sistema dado por el operador experto. Sin embargo, en muchas ocasiones sí que se conoce un modelo cuantitativo del sistema, quedando a expensas del operador la determinación del valor de ciertos parámetros del mismo (p.e. “el factor de crecimiento está entorno de 0.3”). Se ha empleado el control adaptativo y el control robusto para tratar este tipo de incertidumbre paramétrica. El control adaptativo es bueno cuando hay variaciones lentas en los parámetros. El control robusto permite abordar este tipo de incertidumbre, sin embargo, los resultados derivados del mismo son cautos, ya que se basan en el

peor caso. En la presente sección se presenta un nuevo enfoque del problema de la incertidumbre paramétrica, basado en el modelado de los parámetros inciertos mediante números borrosos.

Efectivamente, el concepto “el factor de crecimiento está entorno de 0.3” puede describirse mediante una función de pertenencia determinando qué es para el operador 0.3 ( $\mu_{0.3}(x) : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ ). Mediante el empleo de números borrosos para los coeficientes inciertos, el modelo de un sistema lineal puede expresarse mediante la función de transferencia:

$$\frac{b_m(\tilde{q})s^m + b_{m-1}(\tilde{q})s^{m-1} + \dots + b_0(\tilde{q})}{s^n + a_{n-1}(\tilde{q})s^{n-1} + \dots + a_0(\tilde{q})} \quad (4)$$

donde  $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_r)$ ,  $q_i \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{R})$ ,  $i = 1 \dots r$ , es un vector de coeficientes inciertos y  $a_i(\tilde{q})$  y  $b_i(\tilde{q})$  son funciones borrosas.

El empleo de números borrosos permite introducir conceptos como la “confianza” de que el sistema cumpla determinada propiedad (p.e. estabilidad). En el caso de que no podamos asegurar completamente una determinada propiedad, podemos saber qué riesgo estamos tomando mediante el actual sistema de control, pudiendo sintonizar parámetros del controlador en el caso de que el riesgo no sea tolerable.

### 3.1 Álgebra borrosa.

El concepto de número borroso no es algo nuevo y ha sido objeto de estudio desde hace tiempo [5, 6], sin embargo, ha suscitado poca atención por parte de la comunidad de control. Una posible justificación de este hecho es el gran coste computacional que conlleva la evaluación de funciones borrosas.

La extensión del álgebra real en el álgebra borrosa se define mediante el principio de extensión de Zadeh, introducido en 1965. Si la función a extender es biyectiva, entonces la evaluación es trivial. En otro caso, es necesario recurrir a la discretización, bien del universo de discurso, bien del nivel de pertenencia. El primer enfoque puede encontrarse en [8] y [7]. La discretización del universo de discurso presenta el problema de la imprecisión. Aunque puede disminuirse reduciendo el grado de discretización, esto conlleva un incremento importante

del coste computacional. El segundo enfoque puede encontrarse en [5] y [16]. Contrariamente a la discretización del universo de discurso, la discretización del nivel de pertenencia no implica imprecisión, obteniéndose el resultado correcto en los puntos en los que se evalúa. Este caso resulta ser equivalente a la aplicación del álgebra intervalar a cada uno de los  $\alpha$ -cortes de los operandos, por lo que se puede considerar el álgebra borrosa como una generalización del álgebra intervalar.

Es bien sabido que el álgebra borrosa presenta los siguientes inconvenientes, heredados del álgebra intervalar de la que deriva: la suma extendida y el producto extendido no tienen estructura de grupo, y no se cumple la distributividad de  $\odot$  sobre  $\oplus$ . Como se comenta en [11], esto se debe a la naturaleza de tipo convolutivo del álgebra intervalar. Si  $\tilde{x}$  es un parámetro físico incierto, quizás no sepamos con exactitud su valor, pero será el mismo en cada instancia de  $\tilde{x}$  en la expresión a evaluar. La evaluación de funciones teniendo en cuenta esta consideración conlleva a un problema de optimización que a veces no es fácil de resolver. En este caso, no queda más remedio que recurrir a la evaluación mediante funciones inclusivas, resultando en sobreacotamiento [2].

### 3.2 Representación mediante intervalos funcionales.

Ya que el álgebra borrosa es una generalización del álgebra intervalar, empleándose las mismas herramientas, podemos representar un parámetro borroso  $\tilde{q}$  mediante el término general de sus  $\alpha$ -cortes:

$$q^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} [q^-(\alpha), q^+(\alpha)] \quad (5)$$

donde  $q^-(\cdot)$  es una función creciente y  $q^+(\cdot)$  decreciente, tal que

$$q^-(0) = q^- \quad (6)$$

$$q^+(0) = q^+ \quad (7)$$

$$q^-(1) = q^+(1) = q^0 \quad (8)$$

Denotamos por  $q^0$  el valor nominal del coeficiente, es decir,  $\mu_{\tilde{q}}(q^0) = 1$ , y por  $q^-$  y  $q^+$  los límites del soporte de  $\tilde{q}$ .

Con la representación de números borrosos mediante intervalos funcionales, la aplicación de

las reglas de la aritmética intervalar son directas.

**Ejemplo.** Sea el sistema con polinomio característico

$$p(s, \tilde{q}) = s^3 + (2\tilde{q}_1 \Leftrightarrow \tilde{q}_2)s^2 + (\tilde{q}_3^2 + 2)s + \tilde{q}_4$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \text{tri}(1, 3, 4) & \tilde{q}_2 &= \text{tri}(1.5, 2, 2.5) \\ \tilde{q}_3 &= \text{tri}(1, 2, 3) & \tilde{q}_4 &= \text{tri}(2, 4, 6) \end{aligned}$$

donde  $\text{tri}(p_1, p_2, p_3)$  corresponde a un conjunto borroso triangular con puntos característicos  $(p_1, p_2, p_3)$ .

El polinomio nominal del sistema es

$$p^0(s, \tilde{q}) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

Podemos representar los parámetros inciertos mediante sus  $\alpha$ -cortes:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= [2\alpha_1 + 1, \Leftrightarrow \alpha_1 + 4] \\ \tilde{q}_2 &= [0.5\alpha_2 + 1.5, \Leftrightarrow 0.5\alpha_2 + 2.5] \\ \tilde{q}_3 &= [\alpha_3 + 1, \Leftrightarrow \alpha_3 + 3] \\ \tilde{q}_4 &= [2\alpha_4 + 2, \Leftrightarrow 2\alpha_4 + 6] \end{aligned}$$

y aplicando aritmética intervalar<sup>1</sup> obtenemos los siguientes coeficientes del polinomio característico incierto:

$$\begin{aligned} [a_2(\tilde{q})]_\alpha &= [4\alpha_1 + 0.5\alpha_2 \Leftrightarrow 0.5, \\ &\quad \Leftrightarrow 2\alpha_1 \Leftrightarrow 0.5\alpha_2 + 6.5] \\ [a_1(\tilde{q})]_\alpha &= [\alpha_3^2 + 2\alpha_3 + 3, \alpha_3^2 \Leftrightarrow 6\alpha_3 + 11] \\ [a_0(\tilde{q})]_\alpha &= [2\alpha_4 + 2, \Leftrightarrow 2\alpha_4 + 6] \end{aligned}$$

donde los niveles de pertenencia  $\alpha_i$  se interpretan como el grado de confianza en el parámetro  $\tilde{q}_i$ .

### 3.3 Análisis de estabilidad.

Dado el sistema extendido (4), surgen varias cuestiones acerca de su estabilidad: ¿es el sistema estable suponiendo que la confianza en el modelo es mínima? En caso negativo, ¿cuál es la mínima confianza que debemos tener en el sistema para asegurar estabilidad? Entendemos confianza en el modelo como la confianza en cada uno de sus coeficientes.

<sup>1</sup> $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ ;  $\gamma[a, b] = [\gamma a, \gamma b]$ ,  $\gamma > 0$ ;  
 $-[a, b] = [-b, -a]$ ,  $[a, b]^2 = [a^2, b^2]$ ,  $a > 0$ .

Dado el polinomio característico

$$p(s) = [a_n^-(\alpha_n), a_n^+(\alpha_n)]s^n + \dots + [a_0^-(\alpha_0), a_0^+(\alpha_0)] \quad (9)$$

donde  $\alpha_i$  es el nivel de confianza en el *coeficiente*  $i$ -ésimo, el problema de análisis de estabilidad se reduce a obtener el mínimo  $\alpha_i$ , para  $i = 0..n$ , que mantiene al sistema estable. Para ello es necesario obtener condiciones de estabilidad parametrizadas por el nivel de confianza  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Éstas pueden obtenerse mediante cualquier método de análisis de estabilidad de polinomios intervalares, como por ejemplo, el teorema de Kharitonov [10], que determina que es suficiente demostrar la estabilidad de cuatro polinomios bien definidos, formados a partir de los puntos extremos de los coeficientes, para demostrar la estabilidad del polinomio intervalar. Para obtener el mínimo  $\alpha_i$ ,  $i = 0..n$  que cumple la condición anterior, será necesario recurrir a métodos numéricos. Además, no pueden obtenerse relaciones claras sobre cómo afectan cada uno de los coeficientes inciertos a la estabilidad.

En [3], Argoun introduce un método para estudiar el grado de estabilidad de polinomios perturbados que resulta ser una interpretación en el dominio de la frecuencia del teorema de Kharitonov. Se demuestra que un polinomio nominal estable sometido a perturbaciones acotadas en sus coeficientes se mantiene estable si las bandas de frecuencia que contienen las raíces de la parte real e imaginaria del polinomio perturbado no se solapan. Aplicado al caso borroso, las bandas de frecuencia dependerán de los niveles de confianza  $\alpha_i$ , obteniendo fácilmente la condición de estabilidad [4].

El método implica la resolución algebraica de polinomios de orden mayor a dos cuando el orden del sistema es superior a cinco, obteniendo resultados poco prácticos. A continuación se muestra la condición de estabilidad obtenida para  $n = 5$ , a modo de ejemplo.

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_2^+(\alpha_2) - \sqrt{a_2^+(\alpha_2)^2 - 4a_0^-(\alpha_0)a_4^-(\alpha_4)} \geq 0 \\ (2) \quad & \frac{a_3^+(\alpha_3) - \sqrt{a_3^+(\alpha_3)^2 - 4a_1^-(\alpha_1)a_5^-(\alpha_5)}}{2a_5^-(\alpha_5)} \geq \\ & \frac{a_2^-(\alpha_2) - \sqrt{a_2^-(\alpha_2)^2 - 4a_0^+(\alpha_0)a_4^+(\alpha_4)}}{2a_4^+(\alpha_4)} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{a_2^-(\alpha_2) + \sqrt{a_2^-(\alpha_2)^2 - 4a_0^+(\alpha_0)a_4^+(\alpha_4)}}{2a_4^+(\alpha_4)} \geq$$

$$\frac{a_3^-(\alpha_3) - \sqrt{a_3^-(\alpha_3)^2 - 4a_1^+(\alpha_1)a_5^+(\alpha_5)}}{2a_5^+(\alpha_5)}$$

$$(4) \quad \frac{a_3^-(\alpha_3) + \sqrt{a_3^-(\alpha_3)^2 - 4a_1^+(\alpha_1)a_5^+(\alpha_5)}}{2a_5^+(\alpha_5)} \geq$$

$$\frac{a_2^+(\alpha_2) + \sqrt{a_2^+(\alpha_2)^2 - 4a_0^-(\alpha_0)a_4^-(\alpha_4)}}{2a_4^-(\alpha_4)}$$

donde  $a_i^-(\alpha_i)$  y  $a_i^+(\alpha_i)$  corresponden a los puntos extremos inferior y superior, respectivamente, del coeficiente  $a_i(\alpha_i)$ .

Agrupando los niveles de confianza en coeficientes pares en un nivel de confianza común  $\alpha_e$  y por otra parte los niveles de confianza impares en  $\alpha_o$ , las condiciones de estabilidad anteriores son fácilmente representables gráficamente, obteniendo de forma inmediata el mínimo nivel de confianza par-impar que mantiene el sistema estable. Denotando éste como  $\alpha_e^*$  y  $\alpha_o^*$ , podemos “repartir” dicha incertidumbre entre los diferentes coeficientes según las relaciones<sup>2</sup>:

$$\frac{a_4^+(\alpha_4)a_4^-(\alpha_e^*)}{a_4^-(\alpha_4)a_4^+(\alpha_o^*)} = \frac{a_2^-(\alpha_2)a_2^+(\alpha_e^*)}{a_2^+(\alpha_2)a_2^-(\alpha_o^*)} = \frac{a_0^+(\alpha_0)a_0^-(\alpha_e^*)}{a_0^-(\alpha_0)a_0^+(\alpha_o^*)}$$

$$\frac{a_5^+(\alpha_5)a_5^-(\alpha_o^*)}{a_5^-(\alpha_5)a_5^+(\alpha_e^*)} = \frac{a_3^-(\alpha_3)a_3^+(\alpha_o^*)}{a_3^+(\alpha_3)a_3^-(\alpha_e^*)} = \frac{a_1^+(\alpha_1)a_1^-(\alpha_o^*)}{a_1^-(\alpha_1)a_1^+(\alpha_e^*)}$$

Representando  $\alpha_0$  frente a  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$  y  $\alpha_1$  frente a  $\alpha_3$  y  $\alpha_5$ , puede analizarse la influencia de cada parámetro en la estabilidad. Esto permite resolver cuestiones como, en el caso de que no se pueda garantizar un grado de estabilidad determinado, decidir qué parámetro debo obtener con mayor precisión para mejorar la estabilidad del sistema.

**Ejemplo.** Sea el sistema con polinomio característico

$$p(s) = a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

donde  $a_i$ ,  $i = 0..5$  son coeficientes inciertos representados mediante números borrosos triangulares:

$$p^\alpha(s) = a_5^\alpha s^5 + a_4^\alpha s^4 + a_3^\alpha s^3 + a_2^\alpha s^2 + a_1^\alpha s + a_0^\alpha$$

con

$$a_0^\alpha = [15 + 5\alpha_0, 25 \Leftrightarrow 5\alpha_0]$$

$$a_1^\alpha = [4 + 1.6106\alpha_1, 6 \Leftrightarrow 0.3894\alpha_1]$$

$$a_2^\alpha = [20 + 10\alpha_2, 40 \Leftrightarrow 10\alpha_2]$$

$$a_3^\alpha = [5 + 1.7221\alpha_3, 7 \Leftrightarrow 0.2779\alpha_3 \Leftrightarrow 3]$$

$$a_4^\alpha = [6 + 0.12\alpha_4, 6.2 \Leftrightarrow 0.08\alpha_4]$$

$$a_5^\alpha = [0.5 + 0.5\alpha_5, 1.5 \Leftrightarrow 0.5\alpha_5]$$

Aplicando la extensión del método de Argoun, se obtiene que

- se permite una máxima incertidumbre en los coeficientes impares de  $\alpha_o \simeq 0.68$ , considerando máxima confianza en coeficientes pares ( $\alpha_e = 1$ ).
- se permite una máxima incertidumbre en los coeficientes pares de  $\alpha_e \simeq 0.77$ , considerando máxima confianza en coeficientes impares ( $\alpha_o = 1$ ).
- se permite una máxima incertidumbre de  $\alpha = 0.85$ , considerando confianza común para todos los parámetros.

Dependiendo de consideraciones prácticas, elegimos un valor para  $\alpha_e$  and  $\alpha_o$ . Si queremos, por ejemplo, distribuir la incertidumbre entre parámetros pares e impares de igual forma, tomamos  $\alpha_e = \alpha_o = 0.85$ . Supongamos que la incertidumbre requerida para los coeficientes impares se puede “absorber”, pero no ocurre así con los coeficientes pares, debido, por ejemplo a restricciones en la instrumentación, o a información demasiado vaga por parte del operador. Se cumplen las siguientes relaciones entre los coeficientes pares:

$$\alpha_4 = \frac{\Leftrightarrow 19950 + 22371.7\alpha_2}{\Leftrightarrow 1020.08 \Leftrightarrow 92.664\alpha_2}$$

$$\alpha_0 = \frac{352537 \Leftrightarrow 235200\alpha_2}{175087 + 5250\alpha_2}$$

En la figura 4 podemos ver una representación gráfica de la misma. Como se puede observar, siendo un poco más preciso en  $a_2$ , podemos relajar la confianza exigida sobre  $a_0$ , siendo capaces además de garantizar estabilidad aun a pesar de tener máxima desconfianza en el coeficiente  $a_4$ . En particular, los límites obtenidos son  $\alpha_4 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0.8918$  and  $\alpha_0 = 0.7943$ . Por otra parte, podemos permitir máxima incertidumbre en  $a_2$  considerando  $\alpha_4 = 1$ . Si no es suficiente, deberíamos exigir más precisión a los coeficientes impares.

<sup>2</sup>Se considera orden máximo 5.

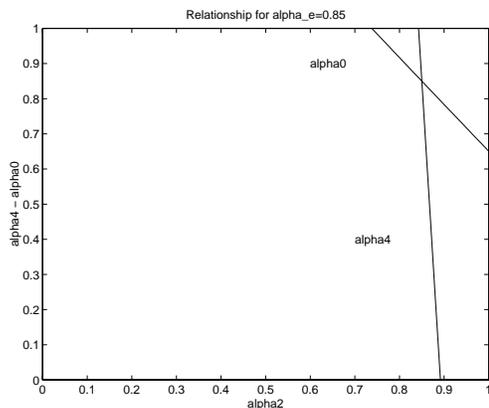


Figura 4: Relación coeficientes pares.

## 4 Conclusiones

En este artículo se ha planteado la necesidad de tratar con información ambigua o incierta en los desarrollos de lógica borrosa. En ese sentido, se ha revisado el tratamiento en modelado y control de la incertidumbre en sistemas cuando ésta es expresada en términos de lógica borrosa, bien con bases de reglas incompletas, bien con información lingüística sobre parámetros del proceso. En la primera parte se presenta la generación y utilización de bases incompletas para modelado y control borrosos. Un análisis de estabilidad de sistemas lineales cuyos coeficientes sean números borrosos ha sido detallado en la segunda parte.

## Referencias

- [1] P. Albertos, J. Picó, and A. Sala. Learning control systems: An overview. In *Procs. Workshop on Control of Complex Systems (COSY)*, pages 38–45, La Sapienza, Rome, Sep. 1995. European Science Foundation.
- [2] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*. Academic Press, Inc., 1983.
- [3] Mohammad B. Argoun. Frequency domain conditions for the stability of perturbed polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(10):913–916, October 1987.
- [4] J. Bondia and J. Picó. Analysis of systems with variable parametric uncertainty using

- fuzzy functions. *Proceedings of ECC'99*, 1999.
- [5] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, Inc., 1980.
- [6] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, Inc., 1980.
- [7] D. P. Filev and R. R. Yager. Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning. *Fuzzy Sets and Systems*, 91(2):137–142, October 1997. Special Issue: Fuzzy Arithmetic.
- [8] René Jager. *Fuzzy Logic in Control*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 1995.
- [9] J.-S.R. Jang, C.-T. Sun, and E. Mizutani. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing*. Prentice Hall, 1997.
- [10] V.L. Kharitonov. On a generalization of a stability criterion. *Izvestiia Akademii nauk Kazakhskoi SSR, Seria fiziko-matematicheskaja*, 1:53–57, 1978.
- [11] G. J. Klir. Fuzzy arithmetic with requisite constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, 91(2):165–175, October 1997. Special Issue: Fuzzy Arithmetic.
- [12] A. Sala. *Validación y aproximación funcional en sistemas de control basados en lógica borrosa (in Spanish)*. PhD thesis, DISA, Univ. Politécnica Valencia, 1998.
- [13] A. Sala and P. Albertos. Inference error minimisation: Fuzzy modeling of ambiguous functions. In *Proc. of Seventh IFSA World Congress*, volume 3, pages 440–445, Prague, 1997. Academia.
- [14] A. Sala and P. Albertos. Variable-structure control with fuzzy plant model. In *Proc. IFAC Workshop on System Structure and Control*, Nantes (F), 1998.
- [15] L.-X. Wang. *Adaptive Fuzzy Systems and Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [16] Hong Quan Yang, Yao Hua, and John Deway Jones. A general method for calculating functions of fuzzy numbers. *Appl. Math. Lett.*, 5(6):51–55, 1992.