Redes. Revista Hispana para el Análisis de Redes Sociales
E-ISSN: 1579-0185
revista-redes@redes-sociales.net
Universitat Autònoma de Barcelona
España

REDES- Revista hispana para el análisis de redes sociales
Vol.24,#1, Junio 2013
http://revista-redes.rediris.es

Modelos matemáticos de la sociedad y aplicaciones. Colaboración y conflicto

Nelia Tello[1]

Escuela Nacional de Trabajo Social, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

José Antonio de la Peña[2]

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México.

Resumen

Se abordan dos problemas: *La evolución de la colaboración,* esto es, los mecanismos estructurales que hacen que la red evolucione y *la aparición del conflicto*: esto es, de que manera la estructura de la red determina conflictos entre individuos y grupos. Dada una red social *S*, su matriz de red A con radio espectral r y vector de Perron *u*, desarrollamos una serie de parámetros vinculados a la estructura de la red: el *capital social* de *y*, $T_S(y) = \sum_{y \neq x=1}^{n} \frac{u_y}{d(x,y)\,(u_x + u_y)}$ donde *d(x,y)* es la distancia entre los nodos *x,y*; el *coeficiente de centralidad* $cent_S(x)$. Estudiamos situaciones en que se satisfacen: (1) $T_S(G) \geq T_G(S)$ y (2) $cent_S(G) \geq \frac{1}{2}$, para grupos de nodos *G*, por ejemplo, los *líderes* (nodos *x* donde u_x alcanza un máximo) satisfacen ambas condiciones. Los cuadrantes determinados por el cumplimiento o no de las condiciones (1) y (2) permiten explicar conceptos tales como *satisfacción* y *conflicto* social.

Palabras clave: capital social, centralidad, satisfacción social, conflicto social.

Abstract

We consider two problems: the evolution of collaboration, that is, the structural mechanisms allowing the network to evolve and the emergence of conflict, that is, the network structures determining conflicts among individuals or groups. Given a social network S, with adjacency matrix A whose spectral radius accepts the Perron vector *u*. We develop some coefficients associated to the structure of the network. The *social capital* defined by $T_S(y) = \sum_{y \neq x=1}^{n} \frac{u_y}{d(x,y)\,(u_x + u_y)}$ where *d(x,y)* is the distance; the *centrality coefficient* $cent_S(x)$. We consider situation when the following conditions hold: (1) $T_S(G) \geq T_G(S)$ and (2) $cent_S(G) \geq \frac{1}{2}$, for systems of nodes *G*. For example, leaders satisfy both conditions. The quadrants determined by the fulfillment or not of conditions (1) and (2) allows to explain concepts such as social satisfaction and social conflicts.

Key words: social capital, centrality, social satisfaction, social confict.

---

[1]E-mail: neliatello@me.com

[2] E-mail: jap@matem.unam.mx

Sociedades: entre la colaboración y el conflicto.

¿Está la sociedad humana, para su funcionamiento, basada en la colaboración? ¿o por contrario, la base de la sociedad es la competencia, en ocasiones brutal entre los seres humanos? A lo largo de los tiempos filósofos, biólogos, psicólogos, economistas han tomado diversos puntos de vista para tratar de explicar el funcionamiento y el complejo tejido social. Para Aristóteles, la sociedad precede en la naturaleza al individuo, decía que "alguien que no puede llevar a cabo una vida social, o que es autosuficiente o no la necesita, es una bestia o un Dios". Desde otra posición, miles de años después, Hobbes pensaba que un gobierno fuerte es necesario para controlar los instintos destructivos del hombre.

El pensamiento pesimista acerca de la naturaleza humana prevaleció largamente. Aún en el mundo animal se pensaba en la lucha despiadada por la supervivencia como el motor de la vida. Darwin, enfrentado a sus propias observaciones de altruismo animal encontraba difícil hacerlas compatibles con su teoría evolucionista. Sin embargo, el clima cambió poco después. Para Wallace, competidor y amigo de Darwin, la idea popular de la lucha por la supervivencia en el mundo animal está muy alejada de la realidad.

El concepto de red social intenta reducir el funcionamiento básico de la sociedad a la comprensión de las relaciones de colaboración entre seres humanos que se consideran desprovistos de personalidad, seres humanos que se identifican con nodos en la red que sólo se manifiestan, o más aún, sólo existen en cuanto están relacionados con otros individuos en la red. Por supuesto es un punto de vista sobre simplificador, pero ambicioso pues se pretende explicar, modelar y predecir sucesos en redes relacionales con el sólo uso de la estructura de red y con las herramientas del álgebra y la combinatoria.

Como hemos discutido antes los antecedentes de este enfoque se encuentran en varias disciplinas. En sociología y filosofía en el pensamiento de la escuela funcionalista. En la economía en varias fuentes del siglo XIX que pretendieron explicar los mecanismos de funcionamiento de la sociedad reduciéndolos a principios básicos de intercambio comercial. Según este enfoque, las relaciones humanas son fundamentalmente de negociación para el intercambio de bienes diversos, no es necesario suponer cargas ideológicas, ni siquiera intencionalidad, basta permitir que los mecanismos naturales de intercambio operen. Tal vez uno de los puntos más altos de este enfoque se tiene en la escuela norteamericana de pensamiento económico, uno de cuyos representantes, irónicamente, ruso de nacimiento, Vasili Leontief determinó los principios fundamentales para el funcionamiento de la economía de mercado libre. Así, un grupo de empresas que se compran y venden insumos sólo subsisten si tienen un margen de ganancias. Esta verdad de Perogrullo encuentra en el modelo de Leontief su expresión matemática precisa que da origen a la moderna teoría microeconómica. No es una coincidencia que el modelo de Leontief requiere para su expresión matemática del Teorema de Perron que hemos encontrado, repetidamente, en nuestros modelos en los capítulos previos. Detalles más, atendiendo especificidades de los problemas abordados, este es el enfoque que hemos adoptado hasta ahora.

Sin embargo hay todavía un par de problemas fundamentales que abordar y serán el tema de este capítulo final de la serie.

(1) *La evolución de la colaboración*: una red social como la hemos venido trabajando representa un corte (una fotografía) en el tiempo de las interrelaciones entre los individuos que constituyen la sociedad. La red está ahí, ante nosotros, estática. ¿Podemos entender los mecanismos que hacen que la red no se detenga ahí y quede paralizada en el tiempo?¿podemos entrever los mecanismos que producen el "deseo" en la red de continuar moviéndose?

(2) *La aparición del conflicto*: en toda sociedad, tarde o temprano hay conflictos. Si nuestros modelos están basados enteramente en el estudio de la colaboración social ¿tiene sentido pensar que la estructura de la red determina conflictos entre individuos y grupos? ¿estos conflictos son parte de la personalidad de los individuos que perdemos de vista en nuestros modelos o son parte de la estructura de la red social?

Para contestar estas preguntas tendremos que tomar, necesariamente, un punto de vista más interpretativo, más analógico. Así hablaremos de *líderes, poder, capital social, satisfacción, conflicto* con un sentido matemático estricto dado por las definiciones de coeficiente e indicadores calculables. Pero también tenemos el punto de vista más coloquial, tal vez menos preciso pero más significativo. *Poder*, por ejemplo, tiene un significado que implica una capacidad de mando, de liderazgo social que no podemos soslayar para entender los modelos que presentamos. Esa ha sido la actitud tomada en los capítulos pasados, en este iremos un poco más lejos.

Hay algo más que decir del enfoque adoptado. Por su propia naturaleza el punto de vista de la construcción de modelos es *mecanicista e instrumentalista*. Esto es, los modelos no permiten dudas o toma de decisiones azarosas de parte de los elementos de la red. Esto es así por construcción del modelo puesto que las redes podrían regirse, al menos parcialmente, de acuerdo a procesos estocásticos. Por otra parte, los modelos permiten ser interpretados de manera instrumental, esto es, como mecanismos o herramientas para conseguir algo, al menos por los individuos que "viven" en la red. Por supuesto, esto también es tema de discusión interpretativa.

Un modelo de colaboración y conflicto en una red social

Consideremos una red social *S* formada por *n* nodos y *e* aristas y sea A=A(*S*)=(a_{xy}) su matriz de red. El radio espectral r de A acepta un vector propio *u* con todas sus coordenadas positivas satisfaciendo $\sum_x u_x = 1$. Dados dos nodos cualesquiera *x, y* de *S*, la distancia[3] *d(x,y)* entre los nodos es la longitud *s* del camino más corto $x=x_0 - x_1 - x_2$ -- … -- $x_s = y$.

La distancia puede expresarse por propiedades de la matriz A. En efecto, si denotamos por $A^k = (a_{xy}^{(k)})$ las potencias de A, entonces la distancia *d(x,y)* es el mínimo número *s* tal que $a_{xy}^{(s)} \neq 0$. En particular, obsérvese que la propiedad de mundos pequeños de una red *S* es equivalente a la existencia de un número *d* (pequeño) tal que $d(x,y) \leq d$, para todos los nodos *x, y*. Recordemos que el *diámetro d(S)* de *S* es la máxima distancia entre dos nodos. La *distancia total* de *S* a un nodo *x* es $d_S(x) = \sum_{y \in S} d(x,y)$. La siguiente sencilla afirmación es útil.

Lema: (a) Consideremos la matriz B = id_n + A y denotamos por $B^k = (b_{xy}^{(k)})$ la sucesivas potencias de B. Entonces $d(x,y) = \min_{b_{xy}^{(k)} \neq 0} k \leq n-1$.

(b) $n - 1 \leq d_S(x) \leq \frac{1}{2} n(n-1)$ donde el mínimo se alcanza en una gráfica completa K_n y el máximo en una gráfica lineal tomando por *x* un extremo de la línea.

(c) La matriz $id_n - \frac{1}{r}A$ es invertible con inversa

$$W = id_n + \frac{1}{r}A + \frac{1}{r^2}A^2 + \frac{1}{r^3}A^3 + \dots$$

que es estrictamente positiva. En particular, $W^{d(S)} > 0$.

Consideremos en primer lugar una arista $x \longrightarrow y$ en *S*. Por definición de la red, las aristas son la expresión de la colaboración entre los nodos. Pero la colaboración no puede considerarse simétrica, el nodo *más beneficiado en la relación es el más*

[3] Una función distancia *d* siempre cumple los siguientes axiomas: *d(x,x)*=0, para toda *x*; *d(x,y)=d(y,x)*, para cada par *x,y*; *d(x,z) ≤ d(x,y)+d(y,z)*, para cualquier terna *x,y,z*.

fuerte[4], en la medida en que su poder social le permite obtener mayor capital social de la relación. Por ello proponemos la siguiente definición:

$$c_x^{(1)}(y) = \frac{u_y}{u_x + u_y} \quad \text{si } x \text{——} \ y.$$

es la *colaboración de primer orden* que *x* ofrece a *y*, de tal manera que, en el caso de existir la arista, $c_x^{(1)}(y) + c_y^{(1)}(x) = 1$. Por otra parte, la colaboración es menor según aumenta la distancia entre los nodos (de no ser así, los nodos estarían conectados directamente). Definimos así la *matriz de colaboración* de *S* como

$$C_S = (c_x^{(k)}(y))_{xy} \text{ donde } c_x^{(k)}(y) = \frac{u_y}{k\,(u_x + u_y)} \quad \text{si } k=d(x,y).$$

El número $T_S(y) = \sum_{y \neq x=1}^{n} c_x^{(d(x,y))}(y)$ es la *colaboración de la sociedad* con *y*. La simetrización $C_S + C_S^T$ de C_S es la matriz de *distancias recíprocas* $R = (\frac{1}{d(x,y)})$, también conocida como *matriz de Harary*, estudiada en Kinkar (2010) e introducida en química matemática por Plavsic, Nikolicic, Trinajstic y Mihalic (2005).

Proposición: Las siguientes afirmaciones son válidas:

(a) Si $d(x,y)=1$, entonces $\frac{1}{1+\mathrm{r}} \leq \frac{u_x}{u_x + u_y} \leq \frac{1}{1+\mathrm{r}^{-1}}$.

(b) Para todo nodo *y* se cumple $T_S(y) \leq \mathrm{r}^{2d(S)-1}$.

(c) Para un nodo x su *colaboración total* es $T_x(S) = \sum_{y \neq x} c_x^{(d(x,y))}(y)$, entonces $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq T_S(x) + T_x(S) = \sum_{y \neq x} \frac{1}{d(x,y)} \leq \frac{(n-1)^2}{d_S(x)} \leq n-1$, donde la cota inferior se alcanza en la gráfica lineal y la superior en los clanes.

(d) Si *S* es un clan, entonces $T_S(x) = \frac{\mathrm{r}}{4}$ para todo nodo *x*.

[4] Recordemos que en el capítulo 4 hemos definido *el poder* de un nodo *x* como el valor u_x.

Demostración: (a): Observemos que por ser u vector propio de Perron se satisface que si x—y en S, entonces r u_y = $\sum_{y-z} u_z \geq u_x$ y también r $u_x \geq u_y$, lo que implica que $\frac{1}{1+\mathrm{r}} \leq \frac{u_y}{u_x + u_y} \leq \frac{1}{1+\mathrm{r}^{-1}}$.

(b): Por inducción sobre k probamos que para y fija se cumple

$\sum_{x\,,d(x,y)=k} c_x^{(k)}$ (y) $\leq$ $(\frac{\mathrm{r}^2}{1+\mathrm{r}})^k$. Para k =1 se sigue de (a). Para el caso general, observemos que si $d(x,y)$= k +1 entonces existe un nodo z_y con $d(x,z_y)=k$ y una arista z_y – y. Observar que distintos nodos z_y puede haber hasta $c(y)$ $\leq$ r. Si suponemos la desigualdad válida para k, entonces obtenemos la cota superior

$$\sum_{x,d(x,y)=k+1} c_x^{(k+1)}\ (y)\ \leq \sum_{x,d(x,z_y)=k} \left(\frac{u_x+u_{z_y}}{u_x+u_y}\right)\left(\frac{k}{k+1}\right)c_x^{(k)}\,(z) < \left(\frac{\mathrm{r}^2}{1+\mathrm{r}}\right)\left(\frac{\mathrm{r}^2}{1+\mathrm{r}}\right)^k \ .$$

Luego se tiene $T_S(y)$ = $\sum_{k=1}^{d(S)} \sum_{d(x,y)=k} c_x^{(k)}\,(y) \leq \left(\frac{\mathrm{r}^2}{1+\mathrm{r}}\right) \ \frac{(\mathrm{r}^{2d(S)}-1)}{\mathrm{r}^2-1} \leq \mathrm{r}^{2d(S)-1}$

(c): Si k = $d(x, y)$ con $x \neq y$, entonces $c_x^{(k)}$ (y) + $c_y^{(k)}$ (x) = $\frac{1}{k}$. Se sigue que

$T_S(x)$ + $T_x(S)$ =$\sum_{y\,\neq x} \frac{1}{d(x,y)}$. Por la desigualdad entre las medias armónica y aritmética tenemos

$\frac{n-1}{\sum_{y\,\neq x} \frac{1}{d(x,y)}} \leq \frac{d_S(x)}{n-1} \leq$ n -1 donde la última igualdad puede alcanzarse en el caso de un clan.

(d): Si S es un clan, entonces r = $c(x)$ y el vector u elegido tiene coordenadas todas iguales a $\frac{1}{n} = \frac{1}{1+c(x)}$. Es claro que $c_x^{(1)}$ (y)= $\frac{1}{2}$ y $c_x^{(k)}$ (y) = 0 para $k \geq 2$, luego se obtiene 2 $T_S(x)$ =$T_S(x)$ + $T_x(S)$ = $\frac{\mathrm{r}}{2}$.

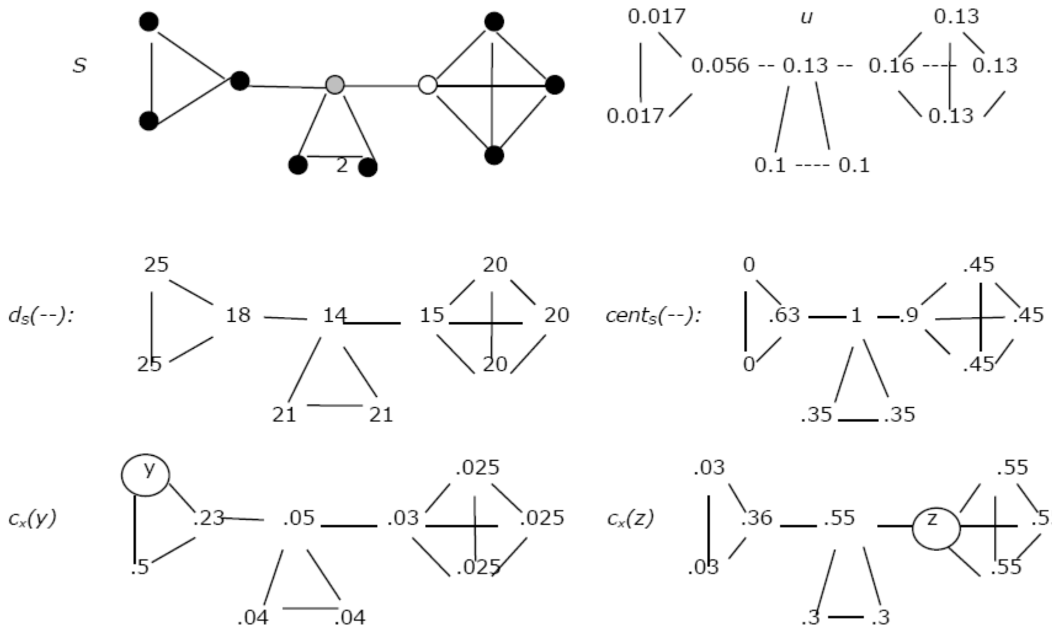
QED.

La noción de distancia en la red S nos permite desarrollar el concepto de *centralidad* de un nodo. Elegimos simplemente el valor mínimo $d_{min}(S)$ de entre las distancias $d_S(x)$ de la sociedad a los nodos x; similarmente tomamos $d_{max}(S)$ el máximo de estas distancias. Definimos la centralidad de un nodo x como

$$cent_S(x) = \frac{d_{max}(x) - d_S(x)}{d_{max}(S) - d_{min}(S)}$$

de manera que un nodo x con mínimo $d_S(x)$, o sea, máxima centralidad, toma valor 1 y uno con la mínima centralidad toma valor 0.

Un ejemplo de las cantidades que estamos estimando para una red social:



Dada la red social *S* calculamos el vector propio de Perron *u,* correspondiente al radio espectral r=3.24, con suma de coordenadas igual a 1, que determina el poder relativo de los nodos. Así el nodo *z* marcado en blanco resulta ser el más *poderoso* de la red. El vector d_S determina la distancia total de cada nodo al resto de la red y el vector $cent_S$ determina los coeficientes de centralidad, así el nodo marcado en gris que tiene menor valor $d_S(x)$ es el nodo más *central* de *S*. Observemos que el nodo más central y el más poderoso no coinciden. Calculamos los valores de los vectores columna de la matriz de colaboración para dos nodos *y, z*. La suma de las coordenadas de estos vectores es la colaboración de la sociedad *S* con el nodo correspondiente, así, $T_S(y)$=0.96 y $T_S(z)$=3.2 son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la colaboración de la sociedad con los diferentes nodos.

Es ahora sencillo generalizar los conceptos anteriores al caso de un subconjunto *G* de nodos de la red *S* con *n(G)* elementos. Tenemos así:

El *coeficiente de centralidad* de G es el promedio de los coeficiente de centralidad de los diferentes elementos de G, esto es,

$$cent_S(G)= \frac{1}{n(G)}\sum_{x \in G} cent_S(x).$$

La *colaboración de la sociedad* con G es la suma de las colaboraciones con elementos de G, esto es,

$$T_S(G)= \sum_{x \in G} T_S(x),$$

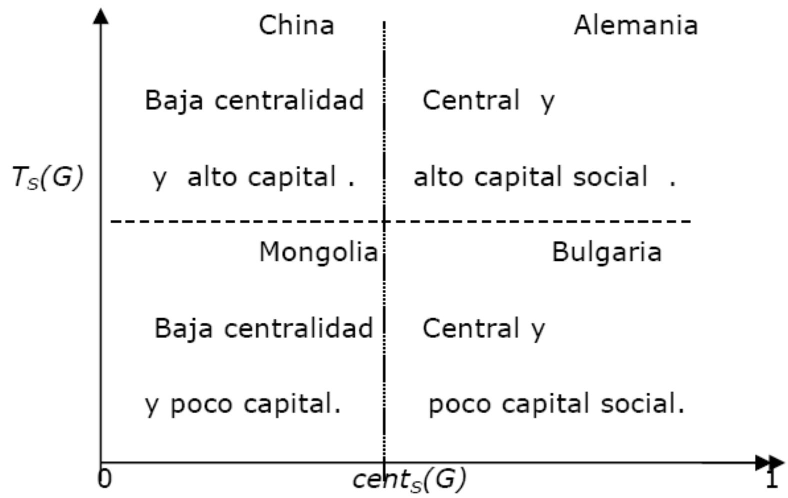
que según hemos visto, puede interpretarse como el *capital social* del grupo *G*. Mientras, la colaboración de G con la sociedad es $T_G(S)= \sum_{x \in G} T_x(S)$. Se tiene que

$$T_S(G) + T_G(S) = \sum_{x\in G} \sum_{x\neq y\in S} \frac{1}{d(x,y)}.$$

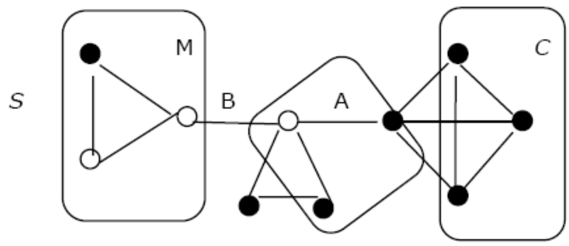
Por otra parte, recordamos del capítulo 4 que hemos definido el posicionamiento de *G* como la suma del poder de sus elementos, esto es,

$$p_S(G) = \sum_{x\in G} u_x.$$

La pareja de valores ($T_S(G)$, $cent_S(G)$) que expresan el posicionamiento y la centralidad de *G* muestran las características esenciales para entender el papel que juega el grupo *G* en la red social *S*. Señalamos solamente la situaciones arquetípicas en el siguiente diagrama[5]:



que llamaremos el modelo ABCM. En la red social antes considerada podemos identificar grupos característicos (con tres elementos) de los tipos arquetípicos anteriores como sigue:



	$cent_S(G)$	$T_S(G)$
A	0.8	8.7
B	0.55	5.5
C	0.45	6.63
M	0.21	3.52

[5] Por supuesto, usamos nombres de países para los arquetipos de grupos por razones nemotécnicas.

El conjunto B está formado por los nodos blancos, los valores de centralidad y capital social para cada conjunto (representantes de los arquetipos) están dados en la tabla adjunta.

Analizar las diferentes situaciones arquetípicas como analogías de la realidad podría hacerse a lo largo de las siguientes líneas:

Capital social: la medida del valor potencial de la colaboración de un individuo, o grupo, con la sociedad. El concepto que desarrollamos identifica, para un nodo *j*, su capital social con la suma de las coordenadas del vector U_xR, donde R es la matriz de las distancias recíprocas y $U_x = \left(\frac{u_y}{u_x+u_y}\right)$. En términos cualitativos este número será mayor según el poder del nodo sea mayor[6], o bien, en caso de disminuir el valor del poder u_y hacerlo en la medida que los valores de las coordenadas de $(d(x,y)\ u_x)$ aumenten. Lo que "espera" conseguir un individuo (=nodo) *x* en la red es estar colocado de manera que su capital social $T_S(x)$ se maximice, para ello puede seguir dos estrategias diferentes:

Búsqueda del poder: aumentar su poder u_x por medio de diversos mecanismos que hemos discutido ya en el capítulo 3.

Búsqueda de los más humildes: si el poder u_x no aumenta se puede obtener un aumento de capital social alejándose de los poderosos y acercándose a individuos *y* con menor poder $u_y < u_x$. Podríamos intentar explicar la práctica de esta estrategia como una suerte de "enriquecimiento espiritual".

Consideremos el caso de un grupo *G*, que bien puede reducirse a un solo individuo. Un aspecto básico para la satisfacción del grupo es que se cumpla el

Primer principio de satisfacción: es *más lo que se recibe que lo que se da* a la sociedad, o sea, $T_S(G) \geq T_G(S)$.

Por razones obvias, si $T_S(G) \geq T_G(S)$ se cumple para *G*, decimos que *G disfruta* del (primer) principio de satisfacción. Observemos los siguientes hechos:

[6] Esto puede verse derivando la función $f(y) = \frac{u_y}{u_x+u_y}$ lo que resulta $f'(y) = \frac{u_x u'_y}{(u_x+u_y)^2} > 0$ si $u'_y > 0$. Similarmente, si la función u_y es decreciente entonces manteniendo las distancias d(x,y) se obtiene $f'(x,y) = \frac{u_x u'_y - u'_x u_y}{(u_x+u_y)^2}$ y como $u'_y < 0$ para garantizar que *f(x,y)* crezca es condición necesaria que $u'_x < 0$.

(a) Los líderes disfrutan del principio de satisfacción. En efecto, si x es líder, para cualquier y se tiene que $u_x \geq u_y$, en particular $\frac{u_y}{d(x,y)(u_x+u_y)} = \frac{1}{d(x,y)(1+\frac{u_x}{u_y})} \geq \frac{1}{2\,d(x,y)}$.

Así, $T_S(x) \geq \frac{1}{2}\sum_{y\neq x}\frac{1}{d(x,y)} = \frac{1}{2}\,(T_S(x) + T_x(S))$ que implica el principio de satisfacción.

(b) Si para cada nodo x llamamos la *satisfacción* $f_S(x)$ de x a la diferencia

$$f_S(x) = T_S(x) - T_x(S),$$

entonces la suma de la satisfacción de todos los nodos es 0, en otras palabras, hay tanta satisfacción (positiva) como insatisfacción en la red social. En efecto, la suma $\sum_{x\in S} T_S(x)$ = 2 $\sum_{y\neq x}\frac{1}{d(x,y)}$ sumando renglones de la matriz R, que obviamente resulta igual que sumando columnas y

$\sum_{x\in S} f_S(x) = \sum_{x\in S} T_S(x) - \sum_{x\in S} T_x(S) = 0.$

Centralidad: concepto clásico en teoría de redes desarrollado por Linton Freeman (1978) y otros, se consideró por mucho tiempo como el concepto fundamental que describe la importancia de los nodos en la red. Según nuestro punto de vista, el concepto fundamental es el del *poder* expresado por medio de los valores del vector de Perron de la matriz de adyacencia A=A(S) de la red S. Sin embargo, hay una estrecha, poco estudiada y mal comprendida, relación entre el concepto de centralidad y el de poder.

Lo que un individuo "espera" es que su centralidad le de poder. La centralidad es una propiedad visible en la red de relaciones, algo con lo que se puede calcular y especular, mientras el poder es una consecuencia de factores más sutiles con los que el individuo no puede especular. Así, para un individuo o grupo lograr una posición central y que su centralidad se refleje en poder es otro factor esencial de satisfacción. Enunciamos el

Segundo principio de satisfacción: $cent_S(G) \geq \frac{1}{2}$ que podríamos frasear coloquialmente como no estar aislado en la sociedad.

Elijamos nodos x_0 y x_1 de manera que $d_S(x_0) = d_{min}(S)$ y $d_S(x_1) = d_{max}(S)$, entonces un nodo x disfruta el segundo Principio de satisfacción si y solamente si

$$d_S(x) \geq \frac{1}{2}\,(d_S(x_0) + d_S(x_1)).$$

Mostraremos los siguientes hechos:

(a) Los líderes disfrutan del segundo Principio de satisfacción. En efecto, consideremos la matriz de distancias $D=(d(x,y))$ y $0 < \lambda$ su radio espectral. Observemos que $d_S(x)$ es la suma de las entradas de la columna x-ésima de D.

Por el teorema de Perron, en particular la demostración de Wielandt, ver Gantmacher (1974), tenemos las siguientes cotas:

$$d_S(x_0) \leq \min_y \frac{(U_x D)_y}{U_{xy}} \leq \lambda \leq \max_y \frac{(U_x D)_y}{U_{xy}} \leq d_S(x_1)$$

Si x es un líder, entonces $u_x \geq u_y$ para toda y en S, entonces

$$\frac{1}{1+r} \leq U_{xz} = \frac{u_z}{u_x + u_z} \leq \frac{1}{2}.$$

Procediendo como en el primer Principio $\frac{d(x,z)}{2} \leq \frac{d(x,z)u_z}{u_x+u_z}$ y

$d_S(x_0) \leq \min_y \frac{(U_x D)_y}{U_{xy}} \leq d_S(x) \leq \frac{\sum_z \frac{d(x,z)u_z}{u_x+u_z}}{U_{xy}} \leq \max_y \frac{(U_x D)_y}{U_{xy}} \leq d_S(x_1)$, lo que queríamos mostrar.

(b) Si todos los nodos satisfacen el segundo Principio de Satisfacción entonces la red S es regular y todos los nodos satisfacen el primer Principio de Satisfacción. En efecto, procediendo como en el caso del primer Principio se puede mostrar que

$(U_x D)_x \geq \frac{1}{2} \sum_{y \neq x} d(x,y)$

desigualdad equivalente al segundo Principio de Satisfacción para x. Si todos los nodos satisfacen el segundo Principio, entonces $d_S(x)$ tiene valor constante d, además el vector de Perron u= $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, lo que implica que la suma de los renglones de la matriz de adyacencia A=A(S) es constante, o en otros términos, la red S es *regular*, esto es, el número de vecinos $c(x)$ es el mismo para todos los nodos x *ÎS*. En particular, para cualesquiera nodos x, y tenemos

$$\frac{u_y}{d(x,y)(u_x+u_y)} = \frac{1}{2\, d(x,y)}$$

que a su vez implica que $T_S(x) = \frac{1}{2} \sum_{y \neq x} \frac{1}{d(x,y)}$. Esto garantiza el primer Principio de Satisfacción para x.

Finalmente concluimos que el modelo ABCM es una tipificación del grado de satisfacción de los grupos sociales. Así someramente diríamos que el cuadrante A representa grupos satisfechos, el cuadrante M grupos marginales, el cuadrante B grupos sin grandes logros, ni aspiraciones pero con cierto grado de acomodo. Típicamente son grupos que disfrutan del segundo Principio de Satisfacción, pero no del primero. El cuadrante C es más interesante, representa los grupos fuertes, con aspiraciones de mayor poder que por la constitución de la red social no se encuentran bien ubicados, todavía. Típicamente disfrutan del primer Principio de Satisfacción, pero no del segundo. La insatisfacción de los grupos del cuadrante C, sumada con el poder que tienen son los elementos en la base del *conflicto*[7] *social*. En este cuadrante surgen los grupos rebeldes, renovadores, revolucionarios.

Referencias bibliográficas

Birner, J. and Ege, R. (1999) *Two views on social stability: an unsettle question*. The American Journal of Economics and Sociology.

Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs, H. (1980) *Spectra of Graphs -- Theory and applications*. Academic Press.

Gantmacher, F.R. (1974) *The theory of matrices*.Vol II. Chelsea, New York.

Dunbar, R.I.M. (1992), *Neocortex size as a constraint on group size in primates*, *Journal of Human Evolution*, vol. 20, pp. 469-493.

Freeman, L. (1978) *Segregation in Social Networks*. *Sociological Methods and Research 6,* 411-429.

Freeman, L. (1979) *Centrality in Social Networks: I. Conceptual Clarification."* *Social Networks*, 1, 215-239.

Freeman, L., Roeder, D. Mulholland, R.(1980) *Centrality in Social Networks: II. Experimental Results.* *Social Networks 2*, 119-142.

González, A., Elena, VC. (1998) Aproximación teórica a la violencia- San Salvador, di.uca.edu.sv

Kinkar Ch. (2010) *Maximum eigenvalue of the reciprocal distance matrix* J Math Chem 47:21–28.

Merton, Robert (1957). *Social Theory and Social Structure*, revised and enlarged. London: The Free Press of Glencoe.

Plavsic, D., Nikolicic, S., Trinajstic, N. and Mihalic, Z. (2005) On the Harary index for the characterization of chemical graphs Journal of Mathematical Chemistry Volume 12.

[7] La palabra conflicto es usada aquí como *tensiones estructurales*, es decir, condiciones en la red social que pueden evolucionar hacia rupturas del equilibrio, en sentido coloquial y en sentido propiamente matemático (discontinuidades, catástrofes). No hablamos aquí de violencia en el contexto de las redes sociales. Entendemos por violencia, siguiendo a González y Elena (1998) *como un ejercicio de fuerza de parte de instituciones, grupos o individuos sobre otros grupos o individuos con un propósito instrumental --obtener algo de quienes padecen el ejercicio de fuerza-- y/o con un propósito expresivo --poner de manifiesto el poder y las convicciones del ejecutor de fuerza.*